



41. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

410731

In den arabischen Erzählungen von den tausendundein Nächten, die vor vielen hundert Jahren gesammelt wurden, finden wir das folgende Rätsel:

Eine fliegende Taubenschar kam zu einem hohen Baume, und ein Teil von ihnen setzte sich auf den Baum, ein anderer Teil darunter. Da sprachen die auf dem Baume zu denen, die unten waren: „Wenn eine von euch herauffliegt, so seid ihr ein Drittel von uns allen; und wenn eine von uns herabfliegt, so werden wir euch an Zahl gleich sein.“

Wie viele Tauben setzten sich auf den Baum und wie viele darunter?

Hinweis:

Eine Probe sollte zwar durchgeführt, sie muss jedoch nicht mit aufgeschrieben werden.

410732

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Über dessen Seiten AC und BC seien die Quadrate $ACDE$ und $BFGC$ so errichtet, dass sie ABC nicht überdecken. Von den Eckpunkten E und F dieser Quadrate seien auf die Gerade durch A und B die Lote gefällt. Die Lotfußpunkte seien P und Q . Die Seite AB habe die Länge c ; das Lot EP habe die Länge x und das Lot FQ die Länge y .

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen gilt: $x + y = c$.

410733

König Sigmund will seinen beiden Söhnen Raimund und Edmund einen Schatz gerecht aufgeteilt vererben. Der Schatz besteht aus 22 Goldstücken mit den Massen von 1 g, 2 g, ..., 22 g. Er versucht, die Goldstücke so aufzuteilen, dass beide Söhne die gleiche Masse Gold bekommen. Als ihm das nicht gelingt, fragt er seinen Freund, den König Hamar um Rat. Hamar ist Mathematiker und macht folgenden Vorschlag:

„Ich stelle dir eine Aufgabe. Wenn du sie löst, bekommst du von mir ein Goldstück von 23 g. Damit wird dir eine gleichmäßige Aufteilung an deine Söhne gelingen. Löst du die Aufgabe nicht, bekomme ich deine Goldstücke von 21 g und 22 g. Auch dann kannst du deinen Schatz gerecht verteilen.“

- Zeige, dass für 20 Goldstücke und für 23 Goldstücke eine gerechte Verteilung möglich ist! Gib jeweils eine geeignete Verteilung an!
- Zeige, dass für 22 Goldstücke eine gerechte Verteilung nicht möglich ist!
- Für welche Anzahlen n von Goldstücken mit einer derartigen Massenverteilung ist eine gerechte Verteilung möglich, für welche nicht?

Beweise deine Angaben!