Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

41. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

410831

Ein Professor hat die Arbeiten von drei Studentinnen – und zwar von Anne, Bianca und Daniela – durchgesehen, aber nicht mitgebracht. Er sagt zu den Studentinnen: „Sie haben in Ihren Arbeiten unterschiedliche Leistungen gezeigt. Ich habe die Noten 2, 3 und 4 erteilt. Daniela hat keine 4 und Bianca keine 3, aber ich glaube, Anne hat eine 3.“ Später stellte sich heraus, dass der Professor nur einer Studentin eine richtige Auskunft gegeben, sich aber bei den beiden anderen geirrt hatte.
Welche Zensuren hatten die einzelnen Studentinnen?

410832

Wir betrachten zweistellige natürliche Zahlen x, y und stellen fest, dass es Paare $(x; y)$ mit folgender Eigenschaft gibt:
Tauscht man die Ziffern von x gegeneinander aus und addiert zu der so entstandenen Zahl x_v die Zahl 9, dann erhält man y.
Tauscht man die Ziffern von y gegeneinander aus und addiert zu der so entstandenen Zahl y_v die Zahl 9, dann erhält man x.
(Ein solches Paar ist z.B. (25;61); denn es gilt $52 + 9 = 61$ und $16 + 9 = 25$.)
Wir nennen die Zahlen x und y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die als Elemente solcher Paare auftreten!

b) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Hinweis:
Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

410833

König Sigmund will seinen beiden Söhne Raimund und Edmund einen Schatz gerecht aufgeteilt vererben. Der Schatz besteht aus 22 Goldstücken mit den Massen von 1 g, 2 g, ..., 22 g . Er versucht, die Goldstücke so aufzuteilen, dass beide Söhne die gleiche Masse Gold bekommen. Als ihm das nicht gelingt, fragt er seinen Freund, den König Hamar um Rat. Hamar ist Mathematiker und macht folgenden Vorschlag:
„Ich stelle dir eine Aufgabe. Wenn du sie löst, bekommst du von mir ein Goldstück von 23 g. Damit wird dir eine gleichmäßige Aufteilung an deine Söhne gelingen. Löst du die Aufgabe nicht, bekomme ich deine Goldstücke von 21 g und 22 g. Auch dann kannst du deinen Schatz gerecht verteilen.“

a) Zeige, dass für 20 Goldstücke und für 23 Goldstücke eine gerechte Verteilung möglich ist! Gib jeweils eine geeignete Verteilung an!

b) Zeige, dass für 22 Goldstücke eine gerechte Verteilung nicht möglich ist!

c) Für welche Anzahlen n von Goldstücken mit einer derartigen Massenverteilung ist eine gerechte Verteilung möglich, für welche nicht?

   Beweise deine Angaben!