Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

41. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

410841

In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet: Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte. Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld für genau 3 Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Wie viele Tiere konnte der Bauer für den neuen Preis insgesamt kaufen?

Weise durch eine Probe nach, dass der ermittelte Preis und die ermittelte Anzahl tatsächlich alle gegebenen Bedingungen erfüllen!

410842

Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder steht die Zahl Null.
Untersuche, ob es möglich ist, die übrigen 11 Felder dieser Tabelle so mit natürlichen Zahlen von 0 bis 9 zu belegen, dass die folgenden Bedingungen (a), (b) und (c) zugleich erfüllt sind:

(1) Jede dieser Zahlen kommt höchstens zweimal in der Tabelle vor.

(2) Die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen sind gleich groß.

(3) Die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten sind gleich groß und größer als 15.

410843

Untenstehende Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Über den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind die Quadrate $ADFB$ bzw. $BGHC$ bzw. $ACIK$ so gezeichnet, dass sie das Dreieck ABC nicht überdecken. Außerdem wurde dem Quadrat $ADFB$ an der Seite $\overline{DF}$ ein zu ABC kongruentes Dreieck DEF so angefügt, dass die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{EF}$ gleich lang sind.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Punkt C auf der Geraden KG liegt!

b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Vierecke $CEFB$ und $GKAB$ kongruent sind!

c) Wie üblich seien die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ mit a, b bzw. c bezeichnet.

Beweise mithilfe der in b) nachgewiesenen Kongruenz, dass die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.