Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

41. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

411341

Man bestimme alle Paare $(a; b)$ reeller Zahlen a, b, die Lösungen des Gleichungssystems

$$2a^2 - 2ab + b^2 = a \qquad (1)$$

$$4a^2 - 5ab + 2b^2 = b \qquad (2)$$

sind.

411342

Unter der Minimaldistanz einer endlichen Punktmenge versteht man die kürzeste unter allen Längen der Verbindungsstrecken zweier verschiedener Punkte dieser Menge.

a) Man beweise, dass man auf der Oberfläche K einer Kugel vom Radius R acht Punkte finden kann, deren Minimaldistanz größer als $1{,}15\,R$ ist .

b) Man untersuche, ob es auf K acht Punkte gibt, deren Minimaldistanz größer als $1{,}2\,R$ ist.

411343

Für reelles x wird mit $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl n mit $n \leq x$ bezeichnet. Beispielsweise ist $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ und $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
Man beweise, dass für jede Primzahl p die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}$$

gilt.