



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionale)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

421021

Schüler suchen vierstellige natürliche Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Addiert man zu n eine von n verschiedene Zahl, die aus n durch eine zyklische Vertauschung der Ziffern entsteht, so erhält man die Summe 9999.

Während des Suchens streiten sich die Schüler: Eine Gruppe behauptet, dass es mehr als 100 solche Zahlen gibt, die andere, dass es höchstens 100 solche Zahlen n gibt. Wer hat Recht?

Hinweise:

- 1) Eine Zahl aus k Ziffern heißt genau dann k -stellig, wenn ihre erste Ziffer von 0 verschieden ist.
- 2) Eine *zyklische Vertauschung der Ziffern* einer k -stelligen Zahl wird durchgeführt, indem man ein- oder mehrmals die folgende Umsetzung ihrer Ziffern vornimmt: Alle Ziffern werden auf die nächsthöhere Position gerückt und die erste Ziffer auf die Einerstelle. Dabei ist zulässig, dass eine Ziffer 0 an die erste Stelle kommt.

Beispiel: Aus der Zahl 2003 entstehen durch zyklische Vertauschung der Ziffern die Ziffernfolgen 0032, 0320, 3200 und 2003. Das sind in üblicher Schreibweise die Zahlen 32, 320, 3200 und die Zahl 2003 selbst.

421022

Wir betrachten alle diejenigen Zahlen $u^3 - u$, bei denen u eine ungerade Zahl mit $u > 1$ ist.

- a) Beweisen Sie, dass jede dieser Zahlen gerade ist.
- b) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller dieser Zahlen.

421023

Bei einem Viereck bezeichnen wir die beiden Strecken, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten verbinden, als Mittellinien.

Beweisen Sie: Die Mittellinien eines Vierecks sind genau dann gleich lang, wenn seine Diagonalen senkrecht zueinander sind.

421024

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a .

Die Menge M aller Punkte P der Ebene, für die sowohl das Dreieck $\triangle ABP$ als auch das Dreieck $\triangle ADP$ spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

- a) Stellen Sie diese Fläche M (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für $a = 6$ cm) und berechnen Sie den Flächeninhalt $F(M)$ in Abhängigkeit von a .
- b) Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von M .
- c) Beschreiben Sie die Menge M' aller Punkte Q , für die sowohl das Dreieck $\triangle ABQ$ als auch das Dreieck $\triangle ADQ$ stumpfwinklig ist.