Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

421321

Man bestimme alle (im Dezimalsystem) 6-stelligen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) alle Ziffern sind gerade Zahlen,

(2) die Zahl ist durch 7 teilbar,

(3) die erste Ziffer ist doppelt so groß wie die zweite,

(4) die Quersumme der gesuchten Zahl ist 10.

421322

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, der Punkt Q sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$ und der Punkt F sei der Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade QC. Man beweise, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AF}$ gleich lang sind.

421323

Man ermittle alle reellen Lösungen $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} xyz &= 2002 && (1)\\ x+y+z &= 42 && (2)\\ xy+xz &= 377. && (3) \end{aligned}$$

421324

Ein Händler möchte Apfelsinen auf folgende Art und Weise aufstapeln: In der untersten Schicht liegen $a \cdot b$ Apfelsinen in einem Rechteck aus a Reihen mit je b Apfelsinen und $a, b > 1$. In der zweiten Schicht liegen in den Vertiefungen dann $(a-1)\cdot(b-1)$ Apfelsinen. So wird weiter gestapelt, bis in der obersten Schicht nur eine einzelne komplette Reihe Apfelsinen liegt (im Fall $a = b$ also nur eine einzige Apfelsine).
Kann der Händler einen derartigen Stapel aus genau 2002 Apfelsinen bauen? Wenn ja, mit welchen Anzahlen a und b in der untersten Schicht kann er beginnen?