Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 9
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

420931

Die Eckpunkte eines regelmäßigen $2n$-Ecks sollen mit den Zahlen $1; 2; 3; \ldots; 2n$ beschriftet werden, so dass gilt:

(1) Jede der Zahlen $1; 2; 3; \ldots; 2n$ beschriftet genau einen Eckpunkt.

(2) Für jede Seite s ist die Summe der Zahlen an den Eckpunkten von s gleich der Summe der Zahlen an den Eckpunkten der Seite, die s diametral gegenüberliegt.

a) Geben Sie für ein Sechseck eine solche Beschriftung an.

b) Beweisen Sie, dass für ein Achteck eine solche Beschriftung nicht existiert.

420932

Beweisen Sie, dass für jedes Paar $(a; b)$ ganzer Zahlen gilt: Sind beide Zahlen gerade oder beide ungerade, so lässt sich ihr Produkt als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

420933

Wir denken uns zwei „eingerostete" Zirkel der folgenden Art:

(1) Mit dem ersten Zirkel kann man nur noch Kreise mit dem festen Radius r zeichnen.

(2) Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dann kann man mit dem zweiten Zirkel zu jedem Punkt $P \in k$ einen Punkt $Q \in k$ konstruieren, so dass $\angle PMQ = 13^\circ$ gilt.

Untersuchen Sie, ob man mit einem derartigen Zirkelpaar die Eckpunkte eines regelmäßigen 15-Ecks konstruieren kann.