



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade

3. Stufe (Länderrunde)

Klasse 11-13

Aufgaben

1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

421331

Für alle reellen Zahlen a und b ermittle man, wieviele reelle Lösungen x die Gleichung

$$(2x + a + b)^3 = (x + a)^3 + (x + b)^3$$

besitzt, und gebe diese an.

421332

Auf einer Kreislinie k liegen (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) die Punkte A, B, C, D . Ein weiterer Punkt P liege auf der Strecke \overline{AD} im Inneren von k und es gelte $|\overline{DB}| = |\overline{DP}| = |\overline{DC}|$.

Man beweise, dass der Punkt P der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

421333

In einer Beratung sitzen zehn Personen um einen runden Tisch. Nach einer Pause nehmen sie wieder Platz, wobei sich jeder auf seinen bisherigen Stuhl oder auf einen der beiden Nachbarstühle setzt.

Wie viele verschiedene Sitzordnungen sind nach der Pause möglich?