



42. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

420941

Beweisen Sie: Für jedes Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 1$ und $n > 1$ ist die Zahl m^n als Summe von m aufeinander folgenden ungeraden Zahlen darstellbar.

Beispiele: $3^2 = 1 + 3 + 5$, $6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$.

420942

- Zeigen Sie, dass ein Sehnenviereck $ABCD$ eindeutig konstruierbar ist, wenn von ihm die Seite \overline{AB} mit der Länge a sowie die Größe σ des Winkels $\angle BAC$, die Größe τ des Winkels $\angle CBD$ und die Größe ϕ des Winkels $\angle DCA$ gegeben sind.
- Welche Bedingungen (als Forderung gestellt an alle oder einige der Größen a, σ, τ, ϕ) sind notwendig und hinreichend dafür, dass ein derartiges Sehnenviereck existiert?

420943

In der Gleichung

$$n \cdot (\text{ZAHL}) = \text{SUMME} \quad (1)$$

sollen für n eine natürliche Zahl und für die Großbuchstaben Ziffern eingesetzt werden, und zwar für gleiche Großbuchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Großbuchstaben verschiedene Ziffern, so dass sich als ZAHL eine vierstellige Zahl und als SUMME eine fünfstellige Zahl im dekadischen Positionssystem ergeben. Eine solche Einsetzung heißt eine „Lösung“, wenn dabei die Gleichung (1) erfüllt wird.

- Finden Sie eine Lösung!
- Finden Sie von allen Lösungen diejenige, für die die Zahl SUMME so klein wie möglich ist!

Hinweis: Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n -stellig, wenn ihre erste Ziffer von null verschieden ist.