Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

420944

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel ganzer Zahlen $(a; b; c)$, für die die Gleichung

$$2\,a^2 + b^2 = 5\,c^2 \tag{1}$$

gilt!

420945

Welches ist die größtmögliche Anzahl von Elementen, die eine Menge M natürlicher Zahlen haben kann, wenn M die folgende Voraussetzung erfüllt:

> Für jede Teilmenge $\{a; b; c\}$ von M (mit $a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c$) gelten die beiden Ungleichungen $a \cdot b \cdot c > 37$ und $a + b + c < 37$.

420946

ABC sei ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden durch A mit der Seite $\overline{BC}$. Ferner seien folgende Bezeichnungen gewählt:

$$|AB| = c, \quad |AC| = b, \quad |AD| = w, \quad |BD| = v, \quad |CD| = u.$$

Zeigen Sie, dass dann $w^2 = (b + u) \cdot (c - v)$ gilt.