



42. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

421041

In der Gleichung

$$n \cdot (\text{ZAHL}) = \text{SUMME} \quad (1)$$

sollen für n eine natürliche Zahl und für die Großbuchstaben Ziffern eingesetzt werden, und zwar für gleiche Großbuchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Großbuchstaben verschiedene Ziffern, so dass sich als ZAHL eine vierstellige Zahl und als SUMME eine fünfstellige Zahl im dekadischen Positionssystem ergeben. Eine solche Einsetzung heißt eine „Lösung“, wenn dabei die Gleichung (1) erfüllt wird.

- Finden Sie eine Lösung!
- Finden Sie von allen Lösungen diejenige, für die die Zahl SUMME so klein wie möglich ist!

Hinweis:

Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n -stellig, wenn ihre erste Ziffer von null verschieden ist.

421042

In einen Würfel mit der Kantenlänge a sollen zwei möglichst große kongruente Kugeln so eingefügt werden, dass sie einander und jeweils drei von einer Würfecke ausgehende Würfel­flächen berühren. Berechnen Sie den Radius dieser Kugeln in Abhängigkeit von a .

421043

Die Zahlen a_1, a_2, a_3, \dots seien durch folgende Bildungsvorschrift bestimmt:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}, \quad a_3 = a_2 + \frac{1}{a_2}, \quad \dots, \quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

Zeigen Sie, dass $a_{100} > 14$ gilt.