



42. Mathematik-Olympiade

4. Stufe (Bundesrunde)

Klasse 11–13

Aufgaben

1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

421341

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y , für die das Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 = 7 \quad (1)$$

$$xy(x + y) = -2 \quad (2)$$

erfüllt ist.

421342

Im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 , die denselben Radius haben. Der Kreis k_1 berührt die Seiten \overline{AB} und \overline{CA} und den Kreis k_4 , der Kreis k_2 berührt die Seiten \overline{AB} und \overline{BC} und den Kreis k_4 , der Kreis k_3 berührt die Seiten \overline{BC} und \overline{CA} und den Kreis k_4 . Man beweise, dass der Mittelpunkt des Kreises k_4 auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Inkreises und des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt.

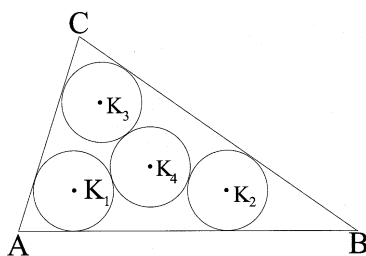


Abbildung A421342

421343

Gegeben ist ein Quadratgitter aus $N \times N$ Kästchen; N sei eine ungerade Zahl größer oder gleich 3. Die Raupe Nummersatt sitzt in dem Kästchen genau in der Mitte des Gitters. Jedes der übrigen Kästchen enthält eine positive ganze Zahl. Über die Verteilung der Zahlen ist nur bekannt, dass sich in keinen zwei Feldern die gleiche Zahl befindet.

Nummersatt möchte durch dieses Zahlenmeer einen Weg nach draußen finden. Sie kann dabei von einem Kästchen stets nur zu einem entlang einer Seite angrenzenden Kästchen weiterwandern und muss jede Zahl fressen, durch deren Kästchen ihr Weg führt. Jede Zahl n wiegt $\frac{1}{n}$ kg, und Nummersatt kann insgesamt nicht mehr als 2 kg Zahlen fressen.

Man untersuche

- für $N = 2003$,
- für alle ungeraden Zahlen $N \geq 3$,

ob die Zahlen im Gitter so ungünstig verteilt sein können, dass Nummersatt keinen Weg nach draußen finden kann, auf dem höchstens 2 kg Zahlen liegen.