Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

43. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

430811

Aus einer Statistik des Regionalschulamtes geht hervor:
Von 1 000 Abiturienten legten genau 400 eine gute bzw. sehr gute Reifeprüfung ab, davon nur 45 % Mädchen. Die restlichen 600 Prüflinge schlossen mit mäßigen oder schlechten Ergebnissen ab; 64 % davon waren Jungen.
Untersuche, ob sich aus diesen Daten schließen lässt, dass die Mädchen insgesamt schlechter abgeschnitten haben als die Jungen!

430812

Abergläubische Menschen befürchten Unangenehmes oder erhoffen sich etwas Besonderes, wenn ein Freitag der dreizehnte Tag eines Monats ist.

a) Untersuche, ob im Laufe eines jeden Jahres mindestens einmal ein "Freitag der dreizehnte" auftritt, unabhängig davon, ob das Jahr ein Schaltjahr ist oder nicht!

b) Wie oft kann es im Jahr höchstens einen "Freitag den dreizehnten" geben? Auf welchen Wochentag fällt dann der 1. Januar?

430813

Anton und Bert suchen nach Möglichkeiten, ein beliebiges regelmäßiges Vieleck mit der Seitenlänge a in regelmäßige Teilvielecke zu zerlegen, die ebenfalls die Seitenlänge a besitzen.
Anton behauptet: "Eine Lösung ist sehr leicht zu finden. Ich glaube nicht, dass es noch weitere Lösungen gibt."
Bert antwortet: "Ich habe noch zwei weitere Lösungen gefunden. Beachte, dass die regelmäßigen Teilvielecke zwar alle die gemeinsame Seitenlänge a besitzen, nicht aber alle von derselben Art sein müssen."
Nach intensivem Knobeln erwidert Anton: "Natürlich hast du Recht. Ich habe sogar noch ein weiteres Vieleck gefunden, das sich in regelmäßige Teilvielecke mit der Seitenlänge a zerlegen lässt. Allerdings ist dieses Vieleck kein regelmäßiges Vieleck, weil (zwar alle Seiten die Länge a besitzen, aber) nicht alle Innenwinkel gleich groß sind."

a) Zeichne die Vielecke, die Anton und Bert gefunden haben! In wie viele Teilvielecke lassen sie sich zerlegen und von welcher Art sind die Teilvielecke bei jeder Zerlegung?

b) Weise nach, dass es keine weiteren Vielecke geben kann, die die gestellten Bedingungen erfüllen!

430814

Eine Zahl heißt Zweierpotenz, wenn sie sich in der Form 2^k schreiben lässt. Dabei ist k eine natürliche Zahl und es gilt $2^0 = 1$.

Sei $z(n)$ diejenige Zahl, die entsteht, wenn man alle Zweierpotenzen von $k = 0$ bis $k = n$ nebeneinander aufschreibt, also z. B.

$$z(10) = 12481632641282565121024.$$

a) Ermittle jeweils die Primfaktorzerlegung von $z(1)$, $z(2)$, $z(3)$, $z(4)$, $z(5)$ und $z(6)$!

b) Man kann vermuten, dass $z(n)$ für kein n durch 5 teilbar ist. Beweise diese Vermutung!

c) Äußere weitere Vermutungen über Eigenschaften der Zahl $z(n)$ in Abhängigkeit von n und versuche, diese Vermutungen zu beweisen!