



43. Mathematik-Olympiade

1. Stufe (Schulrunde)

Klasse 9 und 10

Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

431011

Welche der folgenden Kryptogramme haben im dekadischen Positionssystem eine Lösung?

a)

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline N \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline N \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline N \end{array}$$

Anmerkung:

Eine Lösung eines Kryptogramms ist eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern $\{0; 1; \dots; 9\}$, so dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Die erste Ziffer jeder bei der Ersetzung entstehenden 4- bzw. 5-stelligen Zahl soll von 0 verschieden sein.

431012

Bei einem Experiment mit einem (sechseckigen) Würfel würfelt man mehrfach und addiert die geworfenen Augenzahlen, bis erstmals eine Augensumme größer als 18 erreicht ist. Welche Augensumme tritt bei der Beendigung des Würfels mit der größten Wahrscheinlichkeit auf?

Hinweis:

Zur Lösung der Aufgabe ist keine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erforderlich.

431013

Auf einer Grundebene liegt eine Kugel, deren Radius 1 cm beträgt. Auf der Kugel sind zwei Punkte markiert, die einander diametral gegenüber liegen. Sie werden Südpol bzw. Nordpol genannt. Zu Beginn berührt die Kugel die Ebene mit dem Südpol. Die Kugel kann längs eines beliebigen rechtwinkligen Streckenzuges auf der Ebene gerollt werden, wobei die Drehachse stets parallel zur Grundebene verlaufen muss.

Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen gilt:

- a) Zu jedem vom Ausgangspunkt verschiedenen Endpunkt gibt es einen solchen Streckenzug, so dass die Kugel die Grundebene im Endpunkt mit dem Südpol berührt, wenn sie längs dieses Streckenzugs gerollt wird.

- b) Zu jedem vom Ausgangspunkt verschiedenen Endpunkt gibt es einen solchen Streckenzug, so dass die Kugel die Grundebene im Endpunkt mit dem Nordpol berührt, wenn sie längs dieses Streckenzugs gerollt wird.

Hinweis:

Um die Kugel längs einer Strecke zu rollen muss die Drehachse senkrecht zu dieser Strecke (und parallel zur Grundebene) verlaufen. In den Ecken des Streckenzugs wird die Kugel nicht auf der Stelle gedreht (dabei würde die Drehachse nicht parallel zur Grundebene verlaufen), sondern es wird eine neue Drehachse gewählt, die senkrecht zur bisherigen ist.

431014

Ein Quader mit einer Oberfläche von 2400 cm^2 hat eine Raumdiagonale der Länge 50 cm . Wie lang sind die 12 Kanten des Quaders zusammen?

431015

Auf einer Insel, die keinen Austausch mit der Außenwelt hat, lebt eine besondere Käferart. Die Population einer Generation besteht aus Eiern, Larven, Puppen und Käfern. Die Population einer neuen Generation entsteht stets dadurch, dass jeder Käfer 20 Eier legt und stirbt, sich aus 20 % der alten Eier Larven entwickeln, sich 50 % der alten Larven verpuppen und aus 50 % der alten Puppen Käfer schlüpfen. Die restlichen alten Eier, Larven und Puppen werden vertilgt.

- a) Die Population der 1. Generation bestehe aus 40 Käfern, 200 Eiern, 100 Larven und 30 Puppen. Ermitteln Sie die Population der 5. Generation und die der 41. Generation.
- b) Untersuchen Sie, ob es eine Ausgangspopulation gibt, die sich beim oben beschriebenen Generationswechsel nicht verändert. Ermitteln Sie gegebenenfalls alle derartigen Ausgangspopulationen.

431016

Untersuchen Sie, ob folgende Behauptung wahr ist:

Für sechs positive ganze Zahlen gilt stets mindestens eine der folgenden Aussagen:

- (1) Es lassen sich drei dieser Zahlen auswählen, die paarweise teilerfremd sind.
- (2) Es lassen sich drei dieser Zahlen auswählen, die einen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.