Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

43. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

430821

Antiquitätenhändler Gierig kauft einen Tisch und einen Stuhl für insgesamt 225 Euro und verkauft diese beiden Gegenstände mit 40 % Gewinn.
Wie viel Euro zahlte Herr Gierig beim Kauf für den Tisch und wie viel beim Kauf für den Stuhl, wenn ihm der Tisch beim Verkauf einen Gewinn von 25 % und der Stuhl einen Gewinn von 50 % brachte?
Weise durch eine Probe nach, dass dein Ergebnis alle gegebenen Bedingungen erfüllt!

430822

In einer Bakterienkolonie möge sich die Anzahl der Bakterien im Verlauf von jeweils 30 Minuten verdoppeln. In Abständen von 30 Minuten soll für Versuchszwecke genau viermal die gleiche Anzahl von Bakterien entnommen werden. Zum Zeitpunkt der ersten Entnahme mögen sich genau 3 000 Bakterien in der Kolonie befinden.

a) Wie groß kann die Anzahl der entnommenen Bakterien höchstens sein?
b) Wie viele Bakterien dürfen höchstens entnommen werden, wenn 1 1/2 Stunden nach der vierten Entnahme der anfängliche Bestand wiederhergestellt sein soll?

430823

Es sei k ein Kreis um M. Auf der Kreislinie liegen (in dieser Reihenfolge) die Punkte A, B, C, D so, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind:

$\overline{AB}$ ist ein Durchmesser von k. (1)
Die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{AM}$ haben die gleiche Länge. (2)
Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ haben die gleiche Länge. (3)

Zeige, dass durch diese Bedingungen die Größen der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ eindeutig bestimmt sind!
Gib die Größen der Innenwinkel an!

430824

Brüche mit dem Zähler 1 nennt man „Stammbrüche“. Wir wollen zwei Stammbrüche, deren Nenner zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind (z. B. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$) „aufeinander folgende Stammbrüche“ nennen.

a) Beweise: Sind a und b zwei aufeinander folgende Stammbrüche mit $a > b$, dann ist ihre Differenz genau so groß wie ihr Produkt.

b) Es gibt auch rationale Zahlen r und s mit $r > s$, die keine aufeinander folgenden Stammbrüche sind und deren Produkt so groß ist wie ihre Differenz.
Gib drei derartige Paare rationaler Zahlen an!

c) Ermittle alle rationalen Zahlen r, s, deren Produkt so groß ist wie ihre Differenz!

d) Das Produkt zweier von Null verschiedener Zahlen p und q mit $p > q$ sei gleich ihrer Differenz. Welche Bedingung erfüllen die Kehrwerte von p und q?
Beweise, dass die von dir gefundene Bedingung stets zu Zahlen führt, deren Produkt gleich ihrer Differenz ist!