Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

43. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

431321

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die Lösung der Ungleichung

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geqq \frac{1}{|x|-1}$$

sind.

431322

Man weise nach, dass

$$\sqrt{431\,322^2 + 431\,323^2 + (431\,322 \cdot 431\,323)^2}$$

eine ungerade ganze Zahl ist.

431323

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Auf der Seite $\overline{BC}$ liegt der Punkt E und auf der Seite $\overline{CD}$ der Punkt F. Die Punkte E und F liegen so, dass der Winkel $\angle EAF$ die Größe $45°$ hat. Die Diagonale $\overline{BD}$ wird von der Strecke $\overline{AE}$ im Punkte P und von der Strecke $\overline{AF}$ im Punkte Q geschnitten.
Man beweise, dass der Flächeninhalt des Dreiecks AEF doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks APQ.

431324

In einem Spiel sei jeder der acht Eckpunkte eines Würfels mit einer der Farben Rot und Blau gefärbt.
Ein Zug des Spiels besteht darin, eine Ecke zu wählen und anschließend diese Ecke und ihre drei Nachbarecken, mit denen sie durch Kanten verbunden ist, umzufärben: aus blauen Ecken werden rote und aus roten Ecken werden blaue.
Man untersuche, ob es möglich ist, durch eine Folge derartiger Züge zu einem einfarbigen Würfel zu gelangen,

a) wenn zu Beginn genau eine Ecke des Würfels rot und die übrigen sieben Ecken blau gefärbt sind,
b) wenn zu Beginn die vier Eckpunkte einer Seitenfläche des Würfels rot und die übrigen vier Ecken blau gefärbt sind.