



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

43. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

431331

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} &= \sqrt{y} \\ x^2 - y^2 &= 144 \end{aligned}$$

erfüllen.

431332

Clara und Dorothea spielen das Streckenspiel. Dieses Spiel wird mit 64 in einem Quadratgitter angeordneten Punkten gespielt. Clara beginnt das Spiel, indem sie zwei senkrecht oder waagrecht unmittelbar benachbarte Punkte verbindet.

Im weiteren Spielverlauf besteht ein Zug darin, den bestehenden Streckenzug um eine Strecke zu erweitern, indem einer der beiden Endpunkte wiederum mit einem senkrecht oder waagrecht unmittelbar benachbarten Punkt verbunden wird. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass man nicht zu einem Punkt ziehen darf, der bereits im Streckenzug enthalten ist. Verloren hat diejenige, die keinen Zug mehr machen kann.

Kann eine der Spielerinnen den Gewinn erzwingen? Wenn ja, gebe man eine Strategie an, die mit Sicherheit zum Sieg führt.

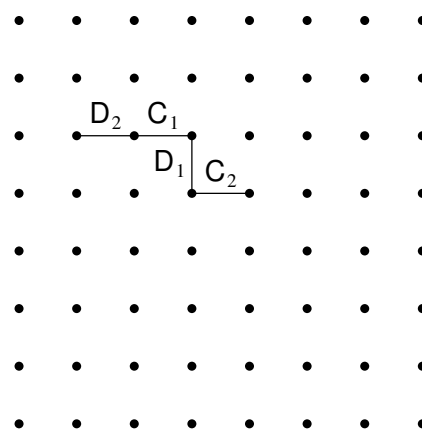


Abbildung A 431332

431333

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Auf den Seiten \overline{CD} und \overline{AD} liegen die Punkte P bzw. Q so, dass der Umfang des Dreiecks PDQ gleich 2 ist. Man beweise, dass der Winkel PBQ die Größe 45° hat.