Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

43. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

431144

Für jede positive ganze Zahl n bezeichne a_n diejenige ganze Zahl, die $\sqrt{n}$ am nächsten liegt. Man berechne die Summe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2004}}.$$

431145

Man beweise, dass für drei positive reelle Zahlen a, b und c stets die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

gilt. Man ermittle, unter welchen Bedingungen Gleichheit eintritt.

431146

Gegeben sei ein ebenes kartesisches Koordinatensystem. Ein Punkt $(x; y)$ wird Gitterpunkt genannt, wenn seine Koordinaten x und y ganze Zahlen sind. Man untersuche, ob es eine Kreislinie gibt, auf der genau fünf Gitterpunkte liegen.