Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

43. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

431341

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$x^4 + y^4 = 17\,(x+y)^2 \tag{1}$$

$$xy = 2\,(x+y) \tag{2}$$

sind.

431342

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf der Peripherie von k liege der Mittelpunkt M_1 eines zweiten Kreises k_1. Die durch M und M_1 verlaufende Gerade sei mit g bezeichnet. Ein Punkt T liege auf der Peripherie von k_1 im Inneren von k. Die Tangente t an k_1 im Punkt T schneide den Kreis k in den Punkten A und B. Schließlich seien a und b die durch A bzw. B verlaufenden und von t verschiedenen Tangenten an k_1.

Man zeige, dass sich die drei Geraden g, a und b in einem gemeinsamen Punkt schneiden oder alle drei Geraden zueinander parallel sind.

431343

Man beweise, dass es für jede positive ganze Zahl n eine positive ganze Zahl z mit folgenden drei Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt:

(1) Die Zahl z hat genau n Ziffern.
(2) Keine der Ziffern von z ist Null.
(3) Die Zahl z ist durch ihre Quersumme teilbar.