Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

44. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9–10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

441011

Für die Zahlen $x = \frac{49}{10}$ und $y = \frac{7}{5}$ gilt $x - y = \frac{x}{y}$.

a) Finden Sie drei weitere Paare rationaler Zahlen x und y, welche diese Gleichung erfüllen.

b) Ermitteln Sie eine Bildungsvorschrift für alle Paare rationaler Zahlen $(x; y)$ mit dieser Eigenschaft.

c) Bestimmen Sie alle Paare positiver ganzer Zahlen $(x; y)$ mit dieser Eigenschaft.

441012

Es stehen sechs gleich große (ungefärbte) Holzwürfel und drei verschiedene Farben zur Verfügung. Auf jedem der Würfel sollen genau drei Seitenflächen mit je einer Farbe vollständig bemalt werden. Dabei sollen auf jedem Würfel alle drei Farben verwendet werden.

Ist es möglich, die sechs Würfel auf die vereinbarte Art so zu bemalen, dass danach jeder Würfel von jedem anderen unterscheidbar ist?

Hinweis: Zwei gefärbte Würfel heißen dabei *nicht unterscheidbar*, wenn man sie durch Drehung und/oder Verschiebung so ineinander überführt denken kann, dass gleich gefärbte Seitenflächen aufeinander liegen.

441013

Es sei n die natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung aus k Einsen besteht, also $n = \underbrace{11\ldots11}_{k \text{ Ziffern}}$.

a) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von k, wie viele Stellen n^2 hat und mit welcher Ziffer n^2 beginnt.

b) Wir stellen fest: $11^2 = 121$ und $111^2 = 12321$. Solche Zahlen, deren Dezimaldarstellung von vorn und von hinten gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt, nennen wir symmetrisch. Für welche Stellenzahlen k ist n^2 eine symmetrische Zahl?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

441014

Es sei $\overline{AB}$ Durchmesser eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r. Ferner sei P ein Punkt auf dem Halbkreis $\widehat{BA} \setminus \{A; B\}$ und Q der Mittelpunkt des Kreisbogens $\widehat{PA}$. g sei die Gerade, welche durch B und P verläuft. Die zu PQ parallele Gerade durch M schneide die Gerade g in R. Beweisen Sie, dass dann $|PR| = r$ gilt.

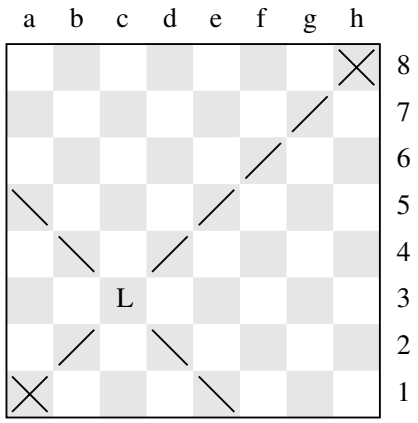
441015

Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks ABC seien ganzzahlig und Teiler seiner Umfangslänge U. Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichseitig ist.

441016

Auf einem Schachbrett sollen Läufer so aufgestellt werden, dass kein Läufer einen anderen bedroht, aber jedes der unbesetzten Felder von mindestens einem Läufer bedroht ist.

a) Finden Sie eine Aufstellung der geforderten Art mit 8 Läufern.
b) Ermitteln Sie die maximale Anzahl m von Läufern, die man auf einem Schachbrett in der geforderten Art aufstellen kann.
c) Untersuchen Sie, für welche Anzahlen n mit $8 < n < m$ es eine Aufstellung der geforderten Art mit n Läufern gibt.

Hinweis (für alle, die nicht wissen, wie sich ein Läufer beim Schach bewegt): Die Menge aller Felder, die auf der Verlängerung derselben Diagonale eines Feldes F des Schachbretts liegen – F eingeschlossen – nennen wir eine *Schräge* von F. Ein Feld heißt von einem Läufer L bedroht, wenn es auf einer der beiden Schrägen des Feldes von L liegt. Eine Figur heißt bedroht,wenn sie auf einem bedrohten Feld steht. Eine Schräge heißt bedroht, wenn jedes ihrer Felder bedroht ist.

Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Schachbrett mit den üblichen Bezeichnungen, einen Läufer L auf Feld c3 und die vier von L bedrohten Schrägen.