



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

**44. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 11–13**  
**Aufgaben**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

441311

Das Produkt 4018020 der Jahreszahlen 2004 und 2005 des diesjährigen Wettbewerbs hat folgende besonderen Eigenschaften:

- (1) Es ist siebenstellig.
- (2) Die Endziffer ist Null.
- (3) Die in dieser Reihenfolge aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl ist genau halb so groß wie die aus den folgenden drei Ziffern gebildete Zahl.

Man untersuche, ob es weitere Paare aufeinander folgender natürlicher Zahlen gibt, deren Produkt diese drei besonderen Eigenschaften besitzt, und bestimme gegebenenfalls alle derartigen Paare.

441312

Man ermittle für jede reelle Zahl  $a$  alle diejenigen Paare  $(x; y)$  reeller Zahlen  $x$  und  $y$ , für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

$$x + y = a \tag{2}$$

erfüllt ist.

441313

Auf der Sehne  $\overline{AB}$  des Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  liege ein von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt  $Q$ . Durch die Punkte  $A$ ,  $M$  und  $Q$  gehe der Kreis  $k_1$ , der den Kreis  $k$  in den Punkten  $A$  und  $C$  schneide. Man beweise, dass die Strecken  $\overline{QB}$  und  $\overline{QC}$  gleich lang sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

## 441314

Lisa und Mara spielen das Spiel der drei Springer. Es wird auf einem Schachbrett gespielt, auf dem sich zu Beginn drei Springer auf den Feldern h1, g2 und f3 befinden (siehe Abbildung A 441314 a). Die Spielerinnen ziehen abwechselnd einen der Springer auf ein leeres Feld, wobei ein Springer anders als beim Schach nur die vier in der Abbildung A 441314 b gezeigten Zugmöglichkeiten hat.

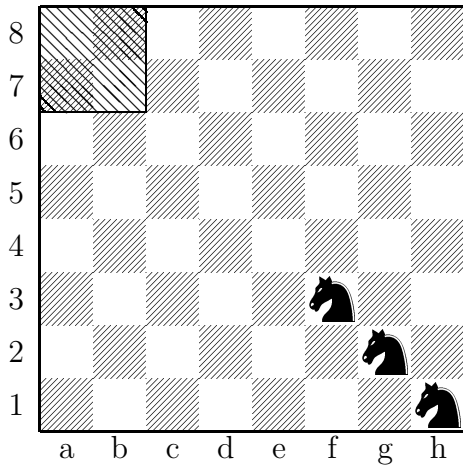


Abbildung A 441314 a

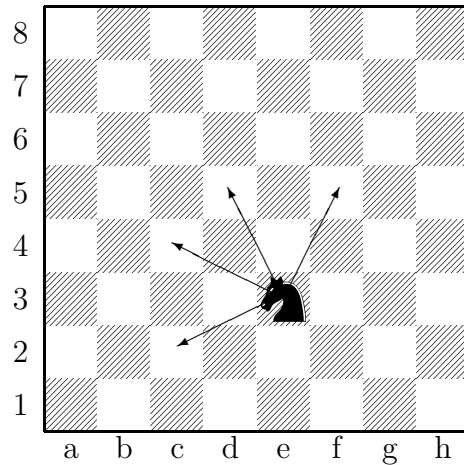


Abbildung A 441314 b

Ziel ist es, die Springer nach Hause zu bringen. Ein Springer ist zu Hause, wenn er auf einem der schraffierten Felder a8, b8, a7 oder b7 steht. Es gewinnt diejenige, die den dritten Springer nach Hause bringt. Tritt schon vorher die Situation ein, dass kein Zug mehr möglich ist, obwohl die drei Springer noch nicht alle zu Hause sind, so ist das Spiel unentschieden. Lisa beginnt.

Gibt es eine Gewinnstrategie für eine der beiden Spielerinnen? Wenn ja, wie lautet sie und warum erzwingt sie den Sieg?