



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade

2. Stufe (Regionalrunde)

Klasse 10

Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

441021

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und dem quadratischen Mittel $q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = 24$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \frac{x + y}{2}$.

441022

Laura und Markus spielen folgendes Spiel: Laura schreibt mindestens drei natürliche Zahlen hintereinander auf eine Tafel. Die erste und die letzte Zahl sind jeweils Null und alle anderen sind positiv. Die Summe aller auf die Tafel geschriebenen Zahlen wird mit S bezeichnet. Markus streicht nun eine an der Tafel stehende positive Zahl z durch; die Summe der links von z stehenden Zahlen sei L , die Summe der rechts von z stehenden Zahlen sei R . Markus hat gewonnen, wenn L und R beide nicht größer als $\frac{1}{2}S$ sind; sonst hat Laura gewonnen.

- Zeigen Sie, dass Markus immer gewinnen kann.
- Die Spielregeln werden dahingehend abgeändert, dass Markus genau dann gewonnen hat, wenn L und R beide kleiner als $\frac{1}{2}S$ sind. Kann Markus in diesem Fall immer gewinnen?

441023

Gegeben sei eine Pyramide $ABCDE$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$, deren Seitenflächen ABE , BCE , CDE und ADE sämtlich gleichseitige Dreiecke sind. Auf der Seitenfläche CDE sei ein regelmäßiges Tetraeder $CDEF$ aufgesetzt.

Untersuchen Sie, ob der Körper $ABCDEF$ sieben unterschiedliche Seitenflächen hat.

441024

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt:

Die Summe aus der Zahl n , ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $Q(Q(n))$ beträgt 2004.