



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

441321

Eine ganze Zahl n sei in der Form

$$n = (a + b)^2 + a - b$$

mit positiven ganzen Zahlen a und b dargestellt.

- Man beweise, dass n gerade ist.
- Man ermittle, wie viele ganze Zahlen n zwischen 1 und $2005 \cdot 2005$ eine solche Darstellung besitzen.

441322

Durch den Mittelpunkt M eines Kreises k gehe die Gerade g . Auf dem Kreis k liege der Punkt P so, dass die Tangente an k in P die Gerade g in einem Punkt S schneidet. Es sei V der Mittelpunkt der Strecke \overline{PS} . Man beweise, dass das Lot von V auf die Gerade g keine inneren Punkte des Kreises k trifft.

441323

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{3+x}{6-x} + \frac{2+y}{9-y} = 0,$$

$$\frac{4+x}{9-y} + \frac{1+y}{6-x} = 0$$

sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

441324

Zwei Freunde Andreas und Ben haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Gegeben sind die n Eckpunkte A_1, A_2, \dots, A_n eines regelmäßigen n -Ecks mit $n \geq 4$. Andreas und Ben zeichnen abwechselnd jeweils eine neue Strecke $A_i A_j$ ($i \neq j$), bis alle Kanten und Diagonalen eingezeichnet sind. Dabei benutzt Andreas die Farbe Blau und Ben die Farbe Rot. Andreas hat gewonnen, wenn am Ende des Spiels mindestens ein „einfarbiges Dreieck“ entstanden ist. Im anderen Fall hat Ben gewonnen.

Für welche n kann Andreas durch geeignete Spielweise den Gewinn erzwingen,

- a) falls Andreas die erste Verbindungsstrecke zeichnet,
- b) falls Ben die erste Strecke zeichnet?

Bemerkung: Unter einem „einfarbigen Dreieck“ verstehe man drei Punkte A_i, A_j, A_k mit $i < j < k$ so, dass die drei Strecken $A_i A_j$, $A_j A_k$ und $A_i A_k$ mit der gleichen Farbe gezeichnet sind.