



**44. Mathematik-Olympiade**  
**3. Stufe (Landesrunde)**  
**Klasse 9**  
**Aufgaben**  
**1. Tag**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

440931

Ein Würfel  $ABCD A' B' C' D'$  hat die Kantenlänge 1 (siehe Abbildung A 440931). Auf seiner Kante  $\overline{BC}$  liegt ein Punkt  $J$  mit  $3 \cdot |CJ| = |BC|$ , auf der Kante  $\overline{A'D'}$  ein Punkt  $M$  mit  $3 \cdot |A'M| = |A'D'|$ .

Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks  $MDJ$ .

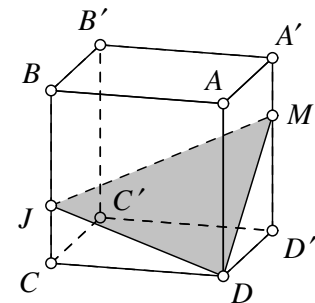


Abbildung A 440931

440932

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Zahl

$$m = 7^{2n} + 7^{n+1} - 7^n + 5$$

durch 12 teilbar ist.

440933

Lässt sich die Gleichungspyramide

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

analog so fortsetzen, dass in der  $n$ -ten Gleichung ( $n \geq 4$ )  $2n + 1$  aufeinander folgende Quadratzahlen so angeordnet sind, dass von diesen Zahlen auf der linken Seite die ersten  $n + 1$  und auf der rechten Seite die restlichen  $n$  vorkommen?

Geben Sie im Falle der Fortsetzbarkeit die  $n$ -te Gleichung (in Abhängigkeit von  $n$ ) an!