Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

441131

Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die Lösung des Gleichungssystems

$$x^2 + yz = 2$$
$$y^2 + xz = 2$$
$$z^2 + xy = 2$$

sind.

441132

Gegeben seien ein Kreis k_1 und ein Punkt C außerhalb des Kreises. Die Berührungspunkte der Tangenten von C an k_1 seien A und B. Ein weiterer Kreis k_2 gehe durch den Punkt C und berühre die Gerade AB im Punkte B. Der zweite Schnittpunkt von k_1 und k_2 sei Q. (Siehe Abbildung A 441132.)

Man beweise, dass die Gerade AQ die Strecke $\overline{BC}$ halbiert.

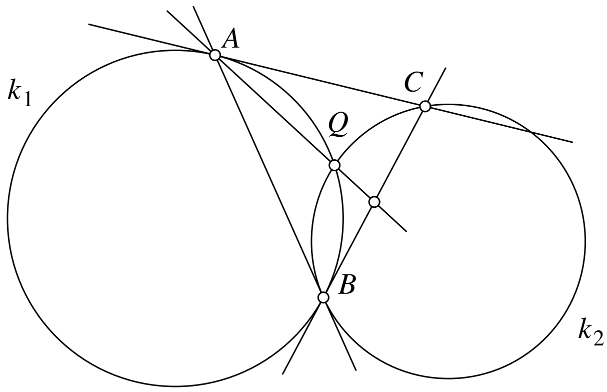

Abbildung A 441132

441133

Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $ab = 1$ die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 2a + b^2$$

gilt.