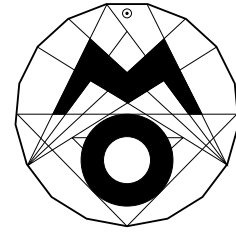


44. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12/13
Aufgaben – 1. Tag



© 2004 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

441341

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$x^3 + 1 - xy^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

$$y^3 - 1 - x^2y + x^2 = 0 \tag{2}$$

sind.

441342

Auf einer Kreislinie k liegen drei paarweise verschiedene Punkte A , B und C . Die Geraden h und g stehen im Punkt B bzw. C auf der Sehne \overline{BC} senkrecht. Die Mittelsenkrechte der Sehne \overline{AB} schneide die Gerade h im Punkt F , die Mittelsenkrechte von \overline{AC} schneide g in G .

Man beweise, dass das Produkt $|BF| \cdot |CG|$ von der Lage des Punktes A unabhängig ist, wenn die Punkte B und C festgehalten werden.

441343

In einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem befindet sich in jedem Gitterpunkt $(x; y)$ mit ganzzahligen Koordinaten x und y eine Lampe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird genau die Lampe im Koordinatenursprung eingeschaltet.

Zu jedem positiven ganzzahligen Zeitpunkt $t = 1, 2, 3, \dots$ werden zusätzlich alle Lampen eingeschaltet, die von mindestens einer der bereits leuchtenden Lampen genau den Abstand 2005 haben.

Man zeige, dass jede Lampe irgendwann eingeschaltet wird.