44. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12/13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

441344

Mit $Q(n)$ sei die Quersumme (also die Summe aller Ziffern der Dezimaldarstellung) der natürlichen Zahl n bezeichnet. Man beweise, dass dann $Q(Q(Q(2005^{2005}))) = 7$ ist.

441345

Es seien r der Radius der Inkugel und r_1, r_2, r_3, r_4 die Radien der vier Ankugeln eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders $ABCD$. Man beweise, dass stets gilt

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}.$$

Die nebenstehende Abbildung A 441345 zeigt ein Tetraeder $ABCD$ mit Inkugel und einer der vier Ankugeln.

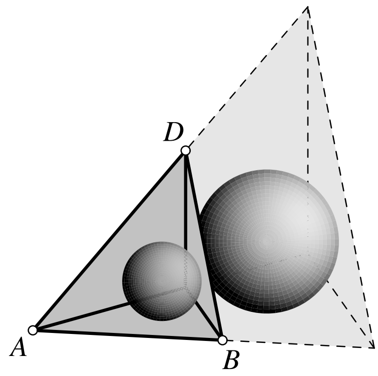

Abbildung A 441345

441346

Eine Folge reeller Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ heißt periodisch mit der (positiven ganzzahligen) Periode p, falls für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt $x_{n+p} = x_n$.

a) Man beweise, dass eine Folge mit der Periode 2 existiert, die der rekursiven Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

genügt.

b) Man zeige, dass es auch zu jeder ganzen Zahl $p > 2$ eine periodische Folge mit der kleinsten Periode p gibt, die der Vorschrift (1) genügt.