

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben



© 2005 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450811

Eine Aufgabe von Leonhard Euler aus dem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“:

Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu je 8 abzähle, so bleiben 7 übrig.“ Die zweite sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu je 10 abzähle, so bleiben mir auch 7 übrig.“

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben ermitteln lässt, wie viele Eier jede der beiden Bäuerinnen hat!

Wenn dies nicht der Fall ist, dann füge eine Bedingung hinzu, damit die Aufgabe eindeutig lösbar wird!

450812

Die Zahl 45 ist in vier Summanden zu zerlegen, für die Folgendes gilt: Addiert man zum ersten Summanden 2, subtrahiert man vom zweiten Summanden 2, multipliziert man den dritten Summanden mit 2, dividiert man den vierten Summanden durch 2, so erhält man stets die gleiche Zahl.

Wie lauten die vier Summanden?

450813

Wir betrachten ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte mit den Seitenmittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 so verbunden sind, wie in Abbildung A 450813 angegeben. Man kann nachweisen, dass das so entstandene Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist.

Ermittle, in welchem Verhältnis der Flächeninhalt von $PQRS$ zum Flächeninhalt von $ABCD$ steht!

Zusatzaufgabe: Beweise, dass das Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist.

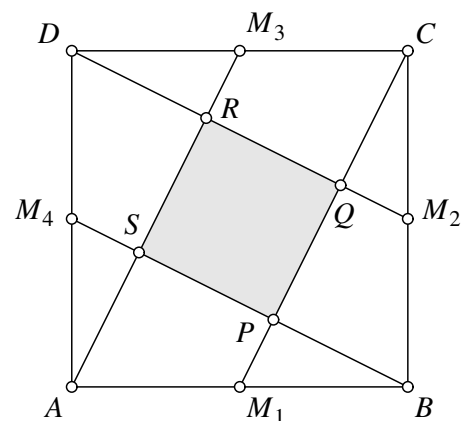


Abbildung A 450813

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450814

Als der 7-jährige Carl Friedrich Gauß, der später „Fürst der Mathematik“ genannt wurde, auf seiner Schiefertafel die lange Rechnung $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ ausführen, d. h. die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen berechnen sollte, schrieb er nach kurzem Nachdenken 5050 als Ergebnis auf. Er hatte die Summanden geschickt zusammengefasst:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) \\ &= 101 + 101 + \dots + 101 \quad (50 \text{ Summanden}) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050. \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen führt aber nur dann zum Ziel, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Beschreibe je ein Verfahren, mit dessen Hilfe sich auch folgende Aufgaben lösen lassen:

- a) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 5 bis 97!
- b) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 5 bis 97!
- c) Berechne die Summe S_2 der zweistelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind!
- d) Berechne die Summe S_4 der vierstelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind!

Zusatzaufgabe: Gib einen allgemeinen Term S_n für die Summe der n -stelligen Zahlen an, deren Ziffern alle ungerade sind!