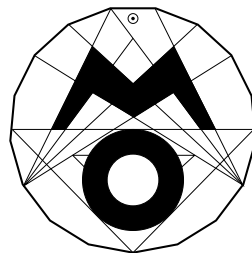


45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben



© 2005 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451311

Man ermittle alle im Dezimalsystem 8-stelligen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Die aus den ersten vier Ziffern gebildete Zahl ist dreimal so groß wie die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl.
- (2) Die Zahl ist gerade.
- (3) Die sechste Ziffer der Zahl ist gleich der zweiten Ziffer.
- (4) Die Zahl ist durch fünf teilbar.
- (5) Die siebente Ziffer der Zahl ist doppelt so groß wie die dritte Ziffer.

Die Zählung der Stellen erfolgt dabei von links nach rechts, die erste Ziffer wird als von Null verschieden vorausgesetzt.

451312

Im Wirtshaus „Zur lustigen Fliege“ werden Koordinaten in Bierdeckeleinheiten gemessen. In der Ecke eines Tisches liegt ein quadratischer Bierdeckel mit der Kantenlänge 1. Ein Gast bewegt diesen so, dass zwei benachbarte Ecken entlang der beiden Tischkanten gleiten (vgl. Abbildung A 451312). Kann eine im Punkt $F(0,8; 1,4)$ sitzende Fliege bei dieser Bewegung getroffen werden? (Die Ecke des Tisches stelle den Koordinatenursprung dar.)

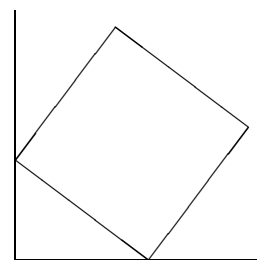


Abbildung A 451312

451313

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$(x + y)^2 - 3(x + y) = 4 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \tag{2}$$

erfüllen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

451314

Wiebke und Stefan trainieren für Northcotts Spiel. Dazu zeichnen sie nebeneinander eine Reihe von Quadraten und stellen einen schwarzen Stein auf das erste Feld sowie einen weißen auf das letzte. Die Abbildung A 451314 zeigt die Ausgangsstellung für eine Reihe von sieben Quadraten.



Abbildung A 451314

Gezogen wird abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den eigenen Spielstein um ein Feld oder um zwei Felder vorwärts oder rückwärts zu versetzen, ohne den gegnerischen Spielstein zu überspringen. Wiebke führt den weißen Stein und beginnt. Verloren hat derjenige, der keinen Zug mehr machen kann.

Man untersuche, ob einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen kann, und beschreibe, auf welche Weise dies möglich ist.