45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450821

a) Marie geht einkaufen. Ihre Mutter gibt ihr dazu etwas Geld mit. Marie bezahlt für Wurstwaren an der Theke 30 %, für Milch 5 % und für Obst und Gemüse 35 % des ihr zur Verfügung stehenden Betrags. Zu Hause erhält Marie von der Mutter ein Drittel des Restbetrags als Taschengeld. Das sind 1,42 €. Wie viel Geld hatte Marie ursprünglich dabei?

b) Marie und ihr Bruder Robert vergleichen den Inhalt ihrer Sparbüchsen: 18 % von Roberts Ersparnissen ergeben denselben Geldbetrag wie 45 % des Gesparten von Marie. Wenn Robert ein Viertel so viel ausgäbe, wie Marie gespart hat, dann blieben ihm noch 146,25 € in seiner Büchse. Wie viel Geld haben Marie und Robert jeweils gespart?

450822

Alfons und Bertram spielen mit einer 5-Cent-Münze und einem Würfel. Als zufällig die „5" auf der Münze und auch auf dem Würfel erscheint, fängt Alfons zu Grübeln an: „Tritt die Zahl 5 häufiger beim Werfen der Münze oder beim Würfeln auf?" Bertram meint: „Sicherlich wird die Münze öfter mit der Zahl 5 nach oben auftreffen, da es ja nur zwei Möglichkeiten gibt". „Dann müsste man den Würfel eben mehrmals nacheinander werfen dürfen", sagt Alfons.

Beide vereinbaren schließlich das folgende Spiel: Alfons wirft die Münze einmal, Bertram würfelt dreimal hintereinander. Gewinnen soll, wer mindestens eine „Fünf" wirft.

Ermittle die Gewinnchancen und entscheide, ob die vereinbarte Regel für Alfons oder für Bertram vorteilhafter ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450823

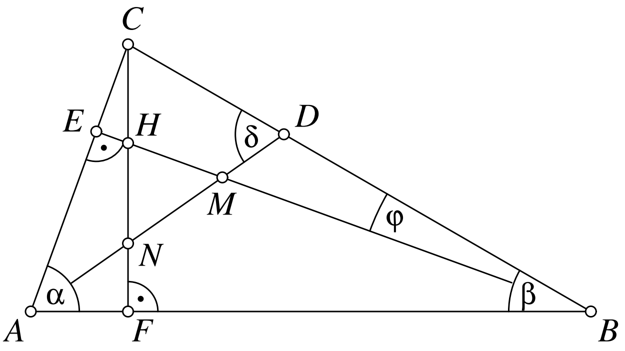

Abbildung A 450823

Die Abbildung A 450823 zeigt ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$, die einander in H schneiden. Die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ des Winkels BAC schneidet $\overline{BE}$ in M und $\overline{CF}$ in N.

Aus der Grafik ist außerdem zu ersehen, dass die Größen der Winkel BAC, CBA, CDA und CBE in dieser Reihenfolge mit α, β, δ bzw. φ bezeichnet sind.

a) Drücke β durch α und φ aus!

b) Drücke δ durch α und φ aus!

c) Untersuche, ob das Dreieck MHN gleichschenklig ist!

450824

Ein Künstler soll in einer Eingangshalle einen Mosaikboden gestalten. Das Muster, das er auf den Boden legen will, besteht aus gleichseitigen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen n, gemessen in cm. Der Künstler experimentiert zunächst mit lauter gleichen, kleineren Mosaiksteinen in Form gleichseitiger Dreiecke mit Seitenlänge 1 cm, die er vorher auf Papier zeichnet. Ein größeres gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge n cm soll dabei vollständig und lückenlos mit den kleineren Mosaiksteinen ausgelegt werden.

a) Wie viele kleine Mosaiksteine braucht der Künstler für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5?
Stelle eine Vermutung für die Anzahl benötigter Mosaiksteine auf, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist und begründe deine Vermutung!

b) Den Künstler befriedigen seine ersten Zeichenversuche aus ästhetischen Gründen noch nicht. Er hat auch viele gleiche trapezförmige Mosaiksteine zur Verfügung und will mit ihnen gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge n cm vollständig und lückenlos auslegen (parkettieren). Jeder Trapezstein hat die Form wie in Abbildung A 450824 mit den Kantenlängen 1 cm, 1 cm, 1 cm sowie 2 cm. Zeichne eine mögliche Parkettierung für $n = 3$!

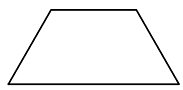

Abbildung A 450824

c) Gibt es jeweils Parkettierungen mit Trapezsteinen für $n = 4$ und $n = 5$? Welche Seitenlängen sind für das gleichseitige Dreieck nur möglich? Begründe auch hier deine Antwort!