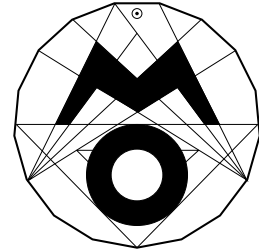


45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben



© 2005 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451021

Es sitzen 25 Jungen und 25 Mädchen an einem runden Tisch. Zeigen Sie, dass es einen Jungen oder ein Mädchen gibt, dessen direkte Nachbarn beide Mädchen sind.

451022

Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4}?$$

451023

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen z größer als 9, für die gilt: Wenn man die erste Ziffer von z wegstreicht, erhält man $\frac{z}{57}$.

451024

In der Mitte des regelmäßigen Achtecks $A_1A_2 \dots A_8$ mit der Seitenlänge a und dem Flächeninhalt A schneiden die acht Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, \dots , $\overline{A_6A_8}$, $\overline{A_7A_1}$ und $\overline{A_8A_2}$ ein kleineres Achteck $B_1B_2 \dots B_8$ mit der Seitenlänge b und dem Flächeninhalt B aus. Dabei bleibt ein eckiger Ring mit dem Flächeninhalt C übrig.

Beweisen Sie: $B = C\sqrt{2}$.