



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade

3. Stufe (Landesrunde)

Klasse 10

Aufgaben

1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

451031

Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

451032

Unter einer Höhe in einem Tetraeder verstehen wir eine Gerade, die durch einen der Eckpunkte geht und zur Ebene der gegenüberliegenden Seitenfläche senkrecht ist. Jedes Tetraeder hat genau vier Höhen. Im Gegensatz zu den Höhen eines Dreiecks müssen sich nicht einmal zwei dieser Höhen schneiden.

Zeigen Sie, dass in einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder gilt: Wenn zwei der Höhen durch einen gemeinsamen Punkt gehen, dann gehen die beiden anderen Höhen auch durch einen gemeinsamen Punkt.

451033

Für welche reellen Zahlen x gilt

$$\frac{x}{[x]} + \frac{[x]}{x} < \frac{x}{\lceil x \rceil} + \frac{\lceil x \rceil}{x} ?$$

Hinweis: $[x]$ ist die größte ganze Zahl k mit $k \leq x$ und $\lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl l mit $l \geq x$.