



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade

3. Stufe (Landesrunde)

Klasse 10

Aufgaben

2. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

451034

Finden Sie alle ganzen Zahlen a , für die auch $\frac{69 - 6a}{2a + 1}$ eine ganze Zahl ist!

451035

Vor langer Zeit gab es im alten China viele Familien von Flugdrachen. Die Drachen dieser Familien transportierten gerne Briefe.

Die Fürsten des Landes planten ein landesweites Postsystem. Bei der Ausschreibung zu diesem Projekt erhielten zwei Drachenfamilien gemeinsam den Zuschlag, die anboten, jedes der vielen kleinen chinesischen Städtchen durch Flugdrachen mit jedem anderen direkt zu verbinden. Zur Umsetzung des Projektes wurde jede Direktverbindung genau einer der beiden Drachenfamilien zugeteilt. Jedoch gerieten die Drachen wegen der Aufteilung derart in Streit, dass die beiden Familien danach gänzlich verfeindet waren.

Nun waren die Fürsten in einer verzwickten Lage: Zum Ersten wollten sie die Ausschreibung des hohen Verwaltungsaufwandes wegen nicht wiederholen, zum Zweiten beharrte jede Drachenfamilie auf alleinige Bedienung der ihr zugeteilten Direktverbindungen, zum Dritten konnte aber keinem Städtchen zugemutet werden, sich von beiden Drachenfamilien anfliegen zu lassen. Hätten sich nämlich zwei Drachen aus unterschiedlichen Familien bei der Postzustellung in einem der Städtchen getroffen, also in Ausübung gerade der Tätigkeit, die die Feindschaft ausgelöst hatte, hätte schnell wieder ein Streit entbrennen können, bei dem womöglich das Städtchen in Schutt und Asche gelegt worden wäre.

Also setzten sich die klugen Fürsten zusammen und beratschlagten, ob die Post mit nur einer Drachenfamilie transportiert werden und dennoch Briefkontakt zwischen beliebigen Städtchen möglich sein könnte.

Man zeige, dass es möglich war, mit einer der beiden Drachenfamilien alle Orte des Landes untereinander zu verbinden, wobei nur die dieser Familie zugeteilten Direktverbindungen verwendet wurden, auch wenn die Post unterwegs nur höchstens zwei zusätzliche Orte passieren durfte.

451036

In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei ein Punkt P auf der Seite \overline{AB} derart gewählt, dass $|AP| : |PB| = |AD| : |DC|$ und zusätzlich $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DCB|$ gilt.

Beweisen Sie, dass dann $|\sphericalangle ADC| = 2 \cdot |\sphericalangle PDB|$ gilt!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann konvex, wenn die Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegen.