



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

**45. Mathematik-Olympiade**

**3. Stufe (Landesrunde)**

**Klasse 12/13**

**Aufgaben**

**2. Tag**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

451334

Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen  $x$  die Ungleichungen

$$x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} < \sqrt{x^2 + 1} < x + \frac{1}{2x} \quad (1)$$

gelten.

451335

Man beweise, dass für jede nichtnegative ganze Zahl  $n$  die Zahl

$$z_n = 100^{n+2} + 101^{2n+1}$$

- a) durch 7,
- b) durch 10101

teilbar ist.

451336

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  mit Umkreis  $k$ . Es sei  $t$  die Tangente an  $k$  im Punkt  $C$ . Die Tangenten an  $k$  in den Punkten  $A$  und  $B$  schneiden die Tangente  $t$  in den Punkten  $M$  beziehungsweise  $N$  und der Fußpunkt des Lotes von  $C$  auf  $\overline{AB}$  sei mit  $P$  bezeichnet. Man beweise, dass die Strecke  $\overline{CP}$  den Winkel  $\sphericalangle NPM$  halbiert.