46. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9/10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

461011

a) Zeigen Sie, dass $1 \cdot 15 + 1$, $11 \cdot 105 + 1$ und $111 \cdot 1005 + 1$ Quadratzahlen sind.

b) Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 0$. Des Weiteren seien $a = 11\ldots1$ die Zahl, deren Ziffernfolge aus n Einsen besteht, und $b = 10\ldots05$ die Zahl, deren Ziffernfolge aus einer Eins, $n-1$ Nullen und einer Fünf besteht.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen $a \cdot b + 1$ eine Quadratzahl ist.

461012

Bernd ist krank und muss Tabletten nehmen. Diese sind in einer mit Alufolie verschlossenen Palette enthalten, welche die Form eines Rechteckes aus 5×2 Quadraten hat. In jedem Quadrat befindet sich eine Tablette. Als er von den 10 Tabletten die vierte entnommen hat, überlegt er sich, ob es denn sehr viele Muster aus 6 vorhandenen und 4 fehlenden Tabletten gibt. Dabei sollen zwei Muster gleich sein, wenn sie durch Drehen der Palette um 180° ineinander übergehen.

Wie viele Muster gibt es?

461013

Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$ und $|AD| = |BC|$ sei O der Diagonalenschnittpunkt. Ferner seien $|\sphericalangle BAC| = 60°$ sowie X, Y, Z die Mittelpunkte der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OD}$ bzw. $\overline{BC}$.

Zeigen Sie, dass dann das Dreieck XYZ gleichseitig ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>461014</u>

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^6 + 2\,x^5 - x^4 - 4\,x^3 - x^2 + 2\,x + 1 = 0.$$

<u>461015</u>

Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Der Punkt P sei im Inneren der Strecke $\overline{AB}$ derart gewählt, dass

$$|AP| : |PB| = |AD| : |DC|$$

für die zugehörigen Streckenlängen gilt. Weiterhin soll gelten, dass die Geraden PD und BC parallel sind.

Beweisen Sie: $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle PDC|$.

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt konvex, falls die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegen.

<u>461016</u>

Zeigen Sie, dass es nur endlich viele Primzahlen p gibt, für welche die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ periodisch mit einer Periodenlänge 5 ist.

Hinweis: Bei periodischen Dezimalbrüchen wiederholt sich ständig ein Block von Ziffern.

Zum Beispiel werden bei $4{,}3075151515151\ldots51\ldots$ Blöcke der Ziffern 51 ständig aneinander gereiht. Man schreibt $4{,}307\overline{51}$ mit der Periodenlänge 2, weil sich ein Block von zwei Ziffern ständig wiederholt.