

46. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 1. Tag



© 2007 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

460931

Die aufsteigende Folge (a_n) mit

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 10, \quad a_6 = 12, \quad a_7 = 13, \quad \dots$$

besteht aus allen positiven ganzen Zahlen, welche eine Dreier-Potenz oder eine Summe von verschiedenen Dreier-Potenzen sind.

Finden Sie das hundertste Glied a_{100} dieser Folge.

460932

Ein Apfel hat die Gestalt einer Kugel vom Radius 1. Eine ganz kleine Made hat sich durch den Apfel gefressen. Sie drang im Punkt P der Oberfläche in den Apfel ein und verließ den Apfel im Punkt Q der Oberfläche wieder. Dabei war ihr Weg eine Linie der Länge 2, welche nicht unbedingt gerade war.

Zeigen Sie, dass man den Apfel durch einen ebenen Schnitt so in zwei gleich große Hälften zerlegen kann, dass das Innere einer der beiden Hälften vom Weg der Made frei bleibt.

460933

Eine zusammengesetzte natürliche Zahl $n > 1$ heißt *Giuga-Zahl* (nach G. Giuga, dem Entdecker dieser Eigenschaft), wenn jeder Primteiler p von n auch $\frac{n}{p} - 1$ teilt.

- a) Finden Sie eine Giuga-Zahl.
- b) Weisen Sie nach, dass keine Giuga-Zahl n durch das Quadrat einer Primzahl p teilbar sein kann.
- c) Zeigen Sie: Wenn n eine Giuga-Zahl ist, dann ist

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} - \frac{1}{n}$$

eine ganze Zahl, wobei mit p_1, \dots, p_m ($p_i \neq p_j$ für $i \neq j$) die Primzahlen bezeichnet werden, welche Teiler von n sind.