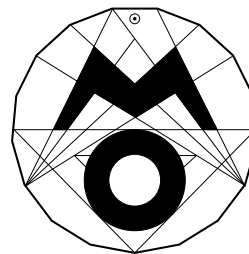


46. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 2. Tag



© 2007 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

461334

Im Jahr 2009 wird die Internationale Mathematik-Olympiade in Deutschland stattfinden. Als Logo wird ein Rechteck $ABCD$ der Größe 5×10 vorgeschlagen, das von einer Geraden geteilt wird, die durch den Eckpunkt A und einen Punkt P auf der längeren Rechteckseite \overline{BC} verläuft. In jedem der beiden Teile befindet sich ein Quadrat, von dem zwei Seiten auf den Rechteckseiten und der gegenüberliegende Eckpunkt auf der Geraden liegen (siehe nebenstehende Abbildung A 461334).

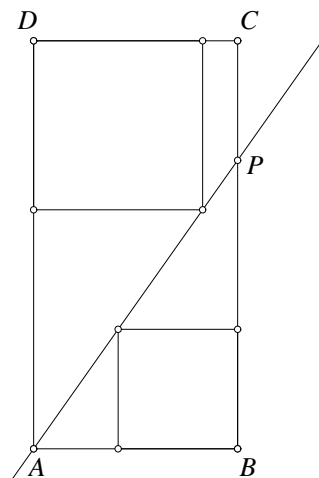


Abbildung A 461334

Man bestimme das Teilverhältnis $|PC| : |PB|$ so, dass die Flächeninhalte der Quadrate im Verhältnis $2 : 1$ stehen.

461335

Ein Winzer möchte Wein abmessen, indem er Wein aus Kanistern mit einem Inhalt von 5, 6 und 7 Litern in ein großes Fass füllt.

- a) Man zeige, dass er so für jede ganze Zahl $n \geq 10$ genau n Liter abmessen kann.
- b) Um effektiv zu arbeiten, will der Winzer mit möglichst wenigen Füllungen auskommen. Man beweise: Hat der Winzer die beiden kleineren Kanister zusammen nicht mehr als dreimal verwendet, war seine Arbeit effektiv.
- c) Man zeige, dass der Winzer nicht effektiv arbeitet, wenn er die beiden kleineren Kanister zusammen mehr als sechsmal verwendet.

461336

Man untersuche, ob die Gleichung

$$x^2 + y^3 + z^5 = w^8$$

keine, endlich viele oder unendlich viele Lösungsquadrupel $(x; y; z; w)$ mit positiven ganzen Zahlen x, y, z und w besitzt.