46. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

461341

Man ermittle alle reellen Zahlen x mit der Eigenschaft, dass für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)\,x \tag{1}$$

gilt.

461342

Die Menge A bestehe aus allen ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$. Die Menge B werde gebildet, indem zu jedem Element von A dieselbe positive ganze Zahl m addiert wird.

Man untersuche, für welche positiven ganzen Zahlen n ein m so gefunden werden kann, dass das Produkt aller Elemente von A multipliziert mit dem Produkt aller Elemente von B eine Quadratzahl ergibt.

461343

Wir nennen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleichorientiert ähnlich, wenn die Eckpunkte A, B, C und A', B', C' den gleichen Umlaufsinn haben und entsprechende Innenwinkel übereinstimmen:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A', \quad \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'.$$

Man beweise folgende Aussage: Sind ALT, ARM, ORT, ULM vier gleichorientiert ähnliche Dreiecke, so ist A der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OU}$.