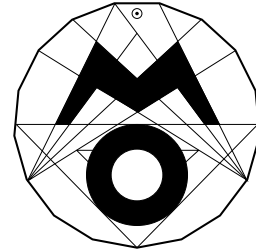


47. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben



© 2007 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

471311

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

- (i) In der Dezimaldarstellung von n kommt jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau einmal vor.
- (ii) Für $k = 1, 2, \dots, 10$ ist k ein Teiler der aus den ersten k Ziffern von n gebildeten Zahl.

471312

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x^2 + y^2 = 2 \tag{1}$$

$$x^4 + y^4 = 4. \tag{2}$$

471313

Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei Punkten A und B . Die Gerade AM_1 schneidet den Kreis k_1 in den Punkten A und C , die Gerade AM_2 schneidet den Kreis k_2 in den Punkten A und D .

Man zeige, dass die Geraden CD und M_1M_2 parallel sind und dass B auf der Geraden CD liegt.

471314

Entlang einer Kreislinie sind abwechselnd n Lampen und n Schalter angeordnet wie in Abbildung A 471314 für $n = 3$ gezeigt. Jeder Schalter besitzt die Stellungen „Ein“ und „Aus“. Jede Lampe leuchtet genau dann, wenn die beiden zu ihr benachbarten Schalter unterschiedliche Stellung haben.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die sich die Schalter so einstellen lassen, dass genau die Hälfte der Lampen leuchtet.

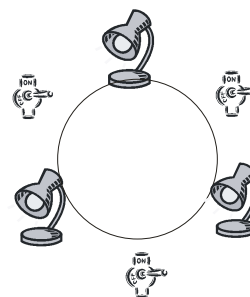


Abbildung A 471314