47. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

471021

Zum Würfeln kann man nicht nur klassische Würfel mit quadratischen Seitenflächen verwenden, sondern auch andere reguläre Körper, auf denen entsprechend Zahlen aufgebracht sind.

Besonders der Oktowürf™ der *Magic Dice Corporation* – ein Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, – wird gern gekauft. In der *Blue Edition* der Firma sind die Seitenflächen mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, und zwar so, dass die Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen sich stets zur selben Summe addieren.

Wie viele verschiedene Oktowürftypen kann die *Blue Edition* enthalten, d. h. wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, ein regelmäßiges Oktaeder unter den obigen Bedingungen zu beschriften?

Dabei soll es nur darauf ankommen, welche Zahlen auf den Seitenflächen stehen, nicht aber, wie die Beschriftung angebracht ist.

471022

Gegeben ist eine positive reelle Zahl a. Es wird eine Folge von Zahlen $x_2, x_3, \ldots$ aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet.

Weisen Sie nach,

a) dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_n < x_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, und

b) dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

471023

Bestimmen Sie alle neunstelligen Zahlen X mit folgenden Eigenschaften:

1. Jede der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ kommt einmal vor.
2. Streicht man von X die letzten sechs Ziffern weg, so bleibt eine durch 3 teilbare Zahl übrig, die genau drei verschiedene Primteiler hat.
3. Streicht man von X die ersten sechs Ziffern weg, so bleibt das Doppelte einer durch 3 teilbaren Quadratzahl übrig.
4. Streicht man von X die ersten drei und die letzten drei Ziffern weg, so bleibt eine Primzahlpotenz übrig.

Hinweis: Die Zahl $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ hat genau drei verschiedene Primteiler. Auch Primzahlen selbst sind Primzahlpotenzen!

471024

Als *Rhombus* oder *Raute* bezeichnet man bekanntlich ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten.

a) Im Rhombus $ABCD$ mit der Seitenlänge a haben die Diagonalen die Längen e und f. Beweisen Sie die Formel $e^2 + f^2 = 4\,a^2$.

b) Nun sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm. Beweisen Sie die Gültigkeit der Parallelogramm-Formel

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2\,.$$