

47. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben



© 2007 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

471321

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x^2 + 4y = 21 \tag{1}$$

$$y^2 + 4x = 21 \tag{2}$$

erfüllen.

471322

Das Dreieck ABC sei gleichschenkelig mit den Schenkeln \overline{AC} und \overline{BC} . Der Ankreis k des Dreiecks ABC berühre die Seite \overline{BC} und die Geraden AC und AB wie in der Abbildung A 471322 gezeigt.

Man beweise, dass der Radius des Kreises k mit der Länge der Höhe auf der Basis des Dreiecks ABC übereinstimmt.

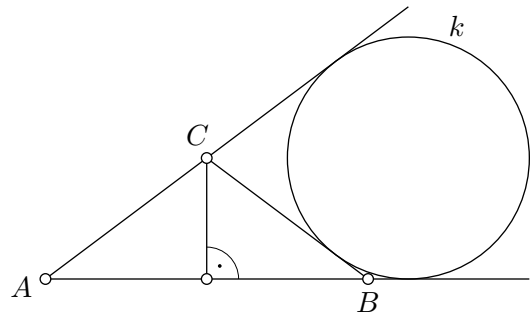


Abbildung A 471322

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

471323

In seinem Kupferstich „Melancholia I“ hat Albrecht Dürer ein magisches Quadrat abgebildet, das in der unteren Zeile das Entstehungsjahr 1514 enthält (siehe Abbildung A 471323 a).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Abbildung A 471323 a

	13		
	15	14	

Abbildung A 471323 b

Bertha beschäftigt sich mit magischen Quadraten. Sie behauptet, dass es ein magisches Quadrat gibt, bei dem die Zahlen 13, 14 und 15 wie in Abbildung A 471323 b eingetragen sind. Man untersuche, ob diese Behauptung wahr ist.

Hinweis: In ein magisches Quadrat (der Ordnung 4) sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 16 so einzutragen, dass die Summen der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden längsten Diagonalen allesamt gleich groß sind.

471324

Eine positive ganze Zahl n soll „stämmig“ genannt werden, wenn der Bruch $\frac{1}{n}$ auf genau zwei verschiedene Weisen als Summe zweier Brüche $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{\ell}$ mit positiven ganzen Zahlen k, ℓ und $k \leq \ell$ darstellbar ist.

Man beweise, dass genau die Primzahlen stämmig sind.