47. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 5
Aufgaben

© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

470531

In der Sesamstraße. Ernie und Bert versuchen, Kryptogramme zu machen, also Zahlenrätsel, bei denen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten, und ungleiche Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. (Keine Zahl beginnt mit der Ziffer 0.)

a) Bert überlegt und schreibt auf

$$\begin{array}{rccccc} & B & E & R & T \\ + & B & E & R & T \\ \hline E & R & N & I & E \end{array}$$

Ernie denkt eine Weile nach – und sagt dann: „Bert, das geht aber nicht!“. Wieso hat Ernie Recht?

b) Dann kommt Ernie mit dem Vorschlag:

$$\begin{array}{rccccc} & E & R & N & I & E \\ + & & B & E & R & T \\ \hline S & T & R & E & E & T \end{array}$$

Bert sagt nach einer Weile: „Das geht auch nicht.“ Wieso?

c) Aber wir können den beiden helfen. Das Kryptogramm

$$\begin{array}{rccccc} & E & R & N & I & E \\ + & E & R & N & I & E \\ \hline S & T & R & E & E & T \end{array}$$

hat eine Lösung. Welche?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

470532

Wir beginnen mit einem (3×3)-Quadrat, bei dem die neun Einzelquadrate so gefärbt sind, wie in der nebenstehenden Abb. A 470532 a gezeigt wird.

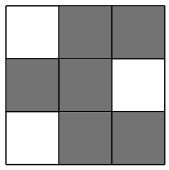
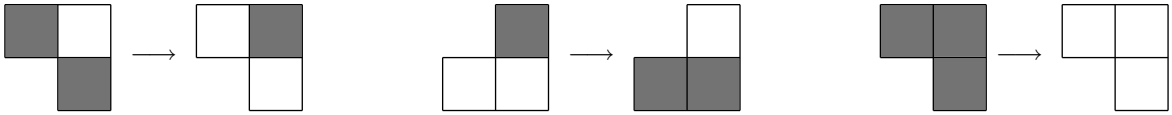


Abbildung A 470532 a

Nun geht es darum, das Quadrat in einer Folge von Zügen einheitlich weiß zu färben. In einem Zug kann man sich drei im Winkel angeordnete Quadrate aussuchen und alle drei Einzelquadrate umfärben. In der Abb. A 470532 b sind zum Beispiel der Winkel (1) in den Winkel (1′), der Winkel (2) in (2′) sowie (3) in (3′) umgefärbt worden.



(1) (1′) (2) (2′) (3) (3′)

Abbildung A 470532 b

a) Zeige, wie du das gegebene Quadrat in der obigen Abb. A 470532 a durch eine Folge solcher Züge einheitlich weiß färben kannst. (Gib dabei die Reihenfolge deiner Züge zeichnerisch an.)

b) Zeige dasselbe für das (3×3)-Quadrat in der nebenstehenden Abb. A 470532 c.

c) Begründe, dass sich jedes (3×3)-Quadrat einheitlich weiß färben lässt.

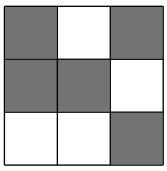


Abbildung A 470532 c

470533

Auf dem Weihnachtsbasar werden Säckchen angeboten, die bunte Glasmurmeln in drei verschiedenen Größen (klein, mittel, groß) enthalten.

- Ein Säckchen vom Typ A enthält 5 kleine Murmeln, 9 mittlere und 4 große;
- ein Säckchen vom Typ B enthält 17 kleine Murmeln, 5 mittlere und 4 große,
- ein Säckchen vom Typ C schließlich enthält 17 kleine Murmeln, 1 mittlere und 6 große.

Jede Murmelsorte hat einen anderen Preis. Alle Säckchen kosten gleich viel, nämlich 5,60 €.

a) Wie viel kostet eine kleine Murmel? Wie viel eine mittlere? Wie viel eine große? Mache eine Probe.

b) Annabella braucht für ihren Bruder 20 kleine Murmeln, 10 mittlere und 10 große. „Ja," sagt der Verkäufer auf dem Basar. „Wenn du die Kugeln einzeln kaufen möchtest, kostet eine kleine Murmel 0,15 €, eine mittlere 0,35 € und eine große 0,70 €." Annabella überlegt kurz und sagt dann: „Gut, dann nehme ich ein Säckchen und kaufe noch einige Einzelmurmeln dazu."
Welches Säckchen könnte sie wählen, und wie viel muss sie dann insgesamt bezahlen?

c) Auf dem Heimweg denkt sie noch einmal nach – und muss feststellen, dass sie noch mehr Geld hätte sparen können. Wie?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

470534

Die gesamte Aufgabe dreht sich darum, die Fläche des (8×12)-Rechtecks aus Einheitsquadraten, das in Abb. A 470534 a zu sehen ist, zu halbieren.

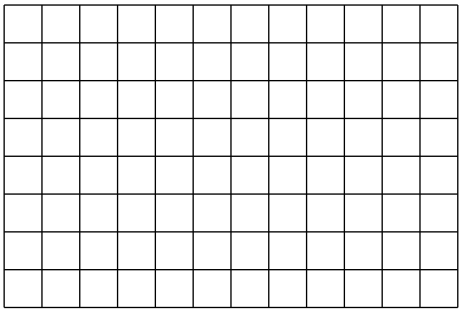


Abbildung A 470534 a

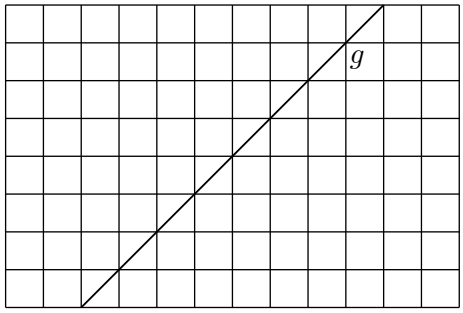


Abbildung A 470534 b

a) Weise nach, dass die Strecke g in Abb. A 470534 b die Fläche des Rechtecks halbiert, also in zwei gleich große Teile teilt.

b) Welche der Strecken in Abb. A 470534 c halbiert ebenfalls die Fläche des Rechtecks, welche nicht? Warum?
Wie kann man ganz schnell sehen, ob eine Strecke die Fläche des Rechtecks halbiert?

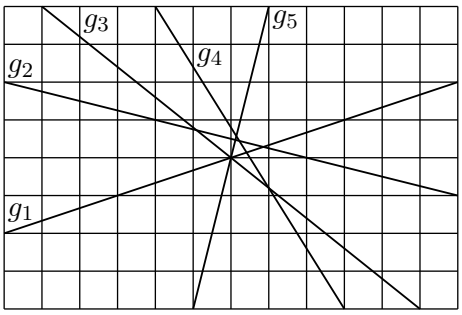


Abbildung A 470534 c

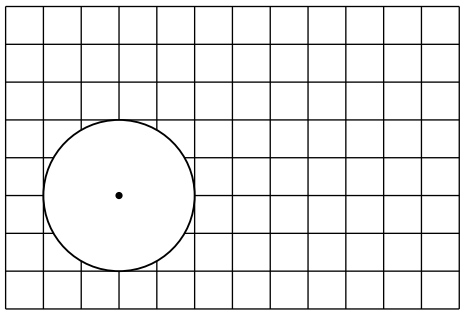


Abbildung A 470534 d

c) In der Abb. A 470534 d ist ein Teil des Rechtecks durch einen Kreis verdeckt (der Mittelpunkt des Kreises ist eingezeichnet). Finde eine Strecke, die die Fläche des nicht verdeckten Teils des Rechtecks halbiert.

d) In der Abb. A 470534 e ist ein Teil des Rechtecks durch ein Rechteck verdeckt. Finde eine Strecke, die die Fläche des nicht verdeckten Teils des Rechtecks halbiert.

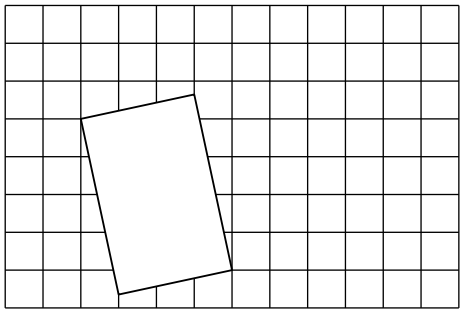


Abbildung A 470534 e