47. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

470834

Das Quadrat der dreistelligen natürlichen Zahl 175 kann man folgendermaßen bilden: Man streicht die Ziffer 5. Es bleibt die Zahl 17 übrig. Diese multipliziert man mit ihrem Nachfolger 18 und erhält das Produkt 306. Man hängt 25 an und erhält die Zahl 30 625. Die Probe $175^2 = 30\,625$ bestätigt dieses Ergebnis.

a) Beweise, dass dieses Verfahren für jede dreistellige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.

b) Untersuche, ob dieses Verfahren für jede beliebige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.

470835

Peter hat sich mit Eigenschaften von Umkreis und Inkreis eines Dreiecks beschäftigt und behauptet:

a) Ein Dreieck, in dem der Mittelpunkt des Umkreises mit dem Mittelpunkt des Inkreises übereinstimmt, ist gleichseitig.

b) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenlängen gleich der Summe der Durchmesserlängen von Umkreis und Inkreis.

Beweise oder widerlege diese Aussagen.

470836

a) Gib die Lösung der Gleichung $|x| = 3x - 2$ sowie die Lösung der Gleichung $|x| = 3x + 5$ an und führe jeweils eine Probe durch.
(Es reicht die Angabe der Lösungen; eine Herleitung wird in diesem Teil nicht erwartet.)

b) Weise nach, dass die Gleichung $|x| = 3x + b$ für jede Zahl b genau eine Lösung hat.

c) Ermittle alle Zahlen a, für die gilt: Die Gleichung $|x| = ax + b$ hat für jede Zahl b mindestens eine Lösung.