47. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

470934

Eine quadratische Funktion f sei durch die Funktionsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ gegeben, wobei a, b, c reelle Zahlen sind und $a \neq 0$ gilt. Außerdem habe f die Eigenschaft

$$f(1) \cdot f(-1) \leq (a - c)^2 \qquad (1)$$

Beweisen Sie:

a) Bedingung (1) ist äquivalent zu $0 \leq b^2 - 4ac$.

b) Bedingung (1) gilt genau dann, wenn die Summe $ax^2 + bx + c$ als ein Produkt

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit noch zu bestimmenden reellen Zahlen x_1 und x_2 geschrieben werden kann.

470935

Wir betrachten eine beliebige Darstellung der Zahl 2007 als Summe von positiven ganzen Zahlen. Jede solche Darstellung lässt sich in der Form

$$2007 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \qquad (1)$$

für ein geeignet gewähltes $k \geq 1$ und positive ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ schreiben.

Die Anzahl der Teiler der Zahl a_i soll mit $t(a_i)$ bezeichnet werden. So ist zum Beispiel $t(47) = 2$, da 1 und 47 die einzigen Teiler der Zahl 47 sind.

Es lässt sich dann zu jeder Summendarstellung (1) der Zahl 2007 die Summe

$$S = t(a_1) + t(a_2) + \cdots + t(a_k)$$

bilden.

a) Es habe n die Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot {p_2}^2 \cdot {p_3}^3$ mit $p_1 < p_2 < p_3$.
Zeigen Sie, dass dann $t(n) = 24$ gilt.

b) Bestimmen Sie den maximalen Wert, welchen die Summe S annehmen kann.

c) Bestimmen Sie den minimalen Wert, welchen die Summe S annehmen kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

470936

Die Familie Wachtelhuber, bestehend aus Vater Bruno, Mutter Marie und ihrem 15-jährigen Sohn Jonas, bewirtschaftet zusammen einen kleinen Familienbauernhof. Zu den täglichen Aufgaben auf dem Hof gehört das Schneiden von Gras zum Ausstreuen des Schweinestalls und zur Fütterung der Hühner. Die Familienmitglieder bedienen sich dazu einer einfachen Sense, bestehend aus einem 150 cm langen Stiel, an dessen einem Ende eine 60 cm lange Sensenklinge rechtwinklig anschließt, deren Krümmung im Folgenden vernachlässigt werden soll.

Beim Einsatz der Sense schwingen alle Familienmitglieder diese zwar einheitlich in einem Winkelbereich von 50° aus, bedingt durch die verschiedenen Körpergrößen der Familienmitglieder ergeben sich jedoch verschiedenen Schnittradien der Sensenklinge. Nichtsdestotrotz glaubt der pfiffige Jonas beobachtet zu haben, dass dieser Umstand keinen Einfluss auf die Größe der Weidenfläche hat, die beim Ausschwingen der Sense beschnitten wird.

Um seine Vermutung zu überprüfen, entwirft er das folgende (stark vereinfachte) Modell, um die beim Ausschwingen der Sense entstehende Fläche zu beschreiben: Betrachtet wird die Fläche $\mathcal{A}$, die eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge 60 cm überstreicht, die um einen Punkt M um den Winkel 50° gedreht wird, wobei die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AM}$ aufeinander senkrecht stehen sollen.

Weisen Sie nach, dass Jonas mit seiner Vermutung recht hat. Zeigen Sie dazu, dass der Flächeninhalt der Fläche $\mathcal{A}$ durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, insbesondere also nicht von der Länge der Strecke $\overline{AM}$ abhängt. Wie groß ist der Flächeninhalt?

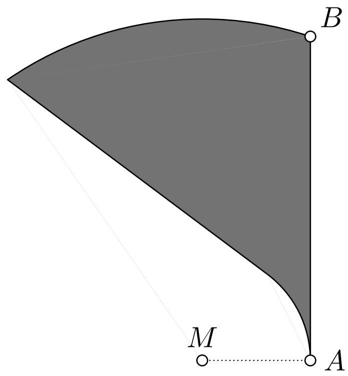

Abbildung A 470936

Hinweis: Zum besseren Verständnis der Aufgabenstellung ist in der obigen Abbildung A 470936 eine nicht maßstabsgetreue Darstellung der beim Ausschwingen der Sense überstrichenen Fläche gegeben.