47. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

471331

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=2\sqrt{x}. \qquad (1)$$

471332

Es seien $ABCD$ ein Sehnenviereck sowie k_1, k_2, k_3, k_4 die vier Kreise, die die Vierecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ beziehungsweise $\overline{DA}$ als Durchmesser besitzen. Es werde vorausgesetzt, dass die Kreislinien k_1, k_2, k_3 und k_4 einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Man zeige, dass dann die Summe der Flächeninhalte der vier Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Umkreises von $ABCD$.

471333

Bernd will runde Spielsteine in Form eines gleichseitigen Dreiecks anordnen wie in Abbildung A 471333 gezeigt. Er beginnt mit 2008 Steinen und stellt fest, dass eine solche Anordnung nicht möglich ist.

Daraufhin startet er eine Versuchsreihe, indem er zu den 2008 vorhandenen Steinen zunächst einen Stein hinzunimmt. Nachdem sein Vorhaben wieder nicht gelingt, entschließt er sich, im nächsten Versuch zu den dann vorhandenen 2009 Steinen gleich zwei weitere Steine auf einmal hinzuzunehmen. Wiederum im nächsten Versuch nimmt er zu den vorhandenen 2011 Steinen gleichzeitig drei neue Steine hinzu, und er fährt fort, indem er die Anzahl der auf einmal hinzutretenden Steine von Versuch zu Versuch um eins erhöht.

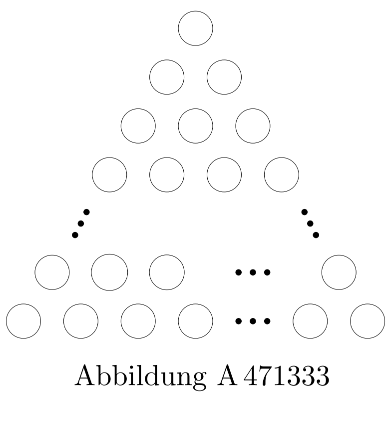

Abbildung A 471333

a) Man beweise, dass Bernd ein Dreieck legen kann, wenn er seine Versuche genügend lange fortsetzt.

b) Man bestimme, wie oft Bernd ein vollständiges Dreieck erhalten kann, wenn er diese Versuchsreihe beliebig lange fortsetzt.