47. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

470844

a) Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Beweise, dass es dann stets einen Kreis gibt, der durch drei von den vier Eckpunkten geht und der das ganze Viereck bedeckt.

b) Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck. Beweise, dass es dann stets einen Kreis gibt, der durch drei nebeneinanderliegende Eckpunkte geht und der das ganze Fünfeck bedeckt.

470845

Der Mathematiker Dr. Eieck veranstaltet eine Denkerparty. Dazu treibt er in jede Ecke seines dreieckigen Rasens einen Pflock und schlägt zusätzlich insgesamt n weitere Pflöcke am Rand oder im Inneren der Rasenfläche ein. Innerhalb des Rasens seien genau k Pflöcke ($0 \leq k \leq n$) eingesetzt, und von ihnen liegen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden. Nun befestigt er möglichst viele, nicht unbedingt gleich lange Hängematten an den Pflöcken, die einander natürlich nicht überschneiden dürfen. Auf diese Weise wird das Rasendreieck in Teildreiecke zerlegt, in die er jeweils einen Stehtisch mit Papier, Schreibzeug und Getränken stellt.

a) Ermittle die Anzahl s der Stehtische und die Anzahl h der Hängematten für folgende konkrete Fälle: $n = 3$ und $k = 0$, 1, 2 oder 3; $n = 4$ und $k = 0$.

   Hinweis: Dabei reicht es, jeweils einen solchen Fall zu betrachten, obwohl es verschiedene Möglichkeiten für die Platzierung der Pflöcke gibt.

b) Gib jeweils eine Formel für die Anzahl $s(n; k)$ von Stehtischen und für die Anzahl $h(n; k)$ von Hängematten in Abhängigkeit von n und k an und berechne $s(33; 22)$ und $h(33; 22)$.

c) Beweise die Richtigkeit dieser beiden Formeln.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

470846

a) Beweise:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

b) Beweise: Für alle geraden positiven ganzen Zahlen n mit $n \leq 50$ gilt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$$

c) Beweise, dass diese Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen n größer als 1 gilt.

Hinweis: Bei der Teilaufgabe a) dürfen mit einem Taschenrechner erhaltene Resultate nicht für die Begründung verwendet werden.