47. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

470941

Matthias hat auf einem alten Zettel die Aufgabe gefunden, vier ganze Zahlen a, b, c, d zu bestimmen, die der Gleichung

$$\frac{1}{47}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) = a\,b + a\,c + a\,d + b\,c + b\,d + c\,d \tag{1}$$

genügen.

a) Auf dem Zettel findet sich bereits eine Lösung, nämlich $b = 3$, $c = 2$ und $d = -3$; nur der Wert von a ist unleserlich. Welche Werte kommen für a in Frage?

b) Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen a, b, c, d, welche die Gleichung (1) erfüllen, auf beiden Seiten der Gleichung eine Quadratzahl steht!

c) Zeigen Sie, dass es für jede Quadratzahl q ein Quadrupel $(a; b; c; d)$ von ganzen Zahlen gibt, für welches die Gleichung (1) erfüllt ist und auf beiden Seiten der Wert q steht!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

470942

Gegeben ist ein schachbrettartiger Spielplan aus $n \times n$ quadratischen Feldern mit $n \geq 2$. Auf die Felder sind willkürlich K Damesteine verteilt, wobei mehrere Damesteine übereinander stehen können. Eine solche Verteilung bezeichnen wir als *Ausgangsstellung*.

Wir untersuchen das folgende Einpersonenspiel: Ein Spielzug besteht darin, dass ein Feld ausgewählt wird, auf dem sich mindestens so viele Steine befinden wie es Nachbarfelder hat, und von diesen Steinen je einer auf jedes dieser Nachbarfelder umgesetzt wird. Dabei heißen zwei Felder *benachbart*, wenn sie eine gemeinsame Kante haben. Das Spiel ist beendet, wenn kein Spielzug mehr ausgeführt werden kann.

a) Finden Sie für $n = 2$ und $K = 4$ alle Ausgangsstellungen, für die es eine Zugfolge gibt, nach der das Einpersonenspiel endet.

Eine Ausgangsstellung heißt *endlich*, wenn es eine Zugfolge gibt, nach der das Spiel beendet ist.

b) Beweisen Sie für beliebige n und K, dass für jede endliche Ausgangsstellung und jede Spielweise gilt: Für jedes Feld ist die Häufigkeit, mit welcher es im gesamten Spiel ausgewählt wird, von der Spielweise unabhängig.

Hinweis: Aus Aussage b) folgt insbesondere, dass es keine Ausgangsstellung gibt, für welche die Endlichkeit des Spiels von der Spielweise abhängt, da das Spiel – unabhängig von der Spielweise – stets nach der gleichen Anzahl von Zügen endet. Dies darf aber zunächst nicht vorausgesetzt werden.

470943

Im Raum ist ein (nicht notwendigerweise reguläres) Tetraeder $ABCD$ gegeben. Der Fußpunkt H des Lotes, welches von D auf die durch A, B, C bestimmte Ebene gefällt wird, liege im Inneren des Dreiecks ABC. Die Fußpunkte der Lote von H auf die Geraden AD, BD und CD seien X, Y bzw. Z.

Man zeige, dass die Punkte A, B, C, X, Y und Z auf einer gemeinsamen Kugel(oberfläche) liegen.