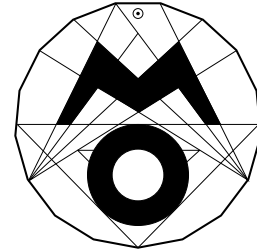


47. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

471044

Zum Würfeln kann man nicht nur klassische Würfel verwenden, sondern auch andere reguläre Körper, auf denen entsprechend Zahlen aufgebracht sind.

Besonders der OktowürfTM der *Magic Dice Corporation* – ein Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen – wird gern gekauft. Deshalb plant die Firma, ihre Produktpalette durch eine *Red Edition* von Oktowürfs aus gehärtetem Kirschbaumholz zu ergänzen. Im Gegensatz zur altbewährten *Blue Edition* sollen in der *Red Edition* die Oktowürfs aber so beschriftet sein, dass benachbarte Zahlen niemals auf benachbarten Seitenflächen stehen.

Wie viele verschiedene Oktowürftypen kann die *Red Edition* enthalten, d. h. wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, ein regelmäßiges Oktaeder unter den obigen Bedingungen zu beschriften?

Dabei soll es nur darauf ankommen, welche Zahlen auf den Seitenflächen stehen, nicht aber, wie die Beschriftung angebracht ist.

Hinweis: Bitte beachten Sie bei Ihrer Arbeitseinteilung: Die vollständige Lösung der Aufgabe kann je nach Ansatz sehr zeitaufwändig sein.

471045

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreismittelpunkt O . Im Inneren der Strecke \overline{CO} wird ein Punkt P gewählt. Die Umkreismittelpunkte der Dreiecke APC und BCP werden mit Q bzw. R bezeichnet. Zeigen Sie, dass sich die Umkreise der Dreiecke ABP und QPR berühren.

471046

Gesucht sind reelle Zahlen x , für welche die beiden Zahlen

$$4x^3 - 7 \quad \text{und} \quad 4x^5 - 7$$

gleichzeitig Quadrate ganzer Zahlen sind.

- a) Zeigen Sie, dass jede solche Zahl x ganzzahlig ist.
- b) Zeigen Sie, dass $x = 2$ die einzige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.