47. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

471341

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}.$$

471342

Das Dreieck SFA ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F. Die Punkte P und Q liegen so auf der Geraden SF, dass der Punkt P zwischen S und F liegt und der Punkt F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ist. Der Kreis k_1 ist der Inkreis des Dreiecks SPA. Der Kreis k_2 liegt außerhalb des Dreiecks SQA und berührt sowohl die Strecke $\overline{QA}$ als auch die Geraden SQ und SA. Man beweise, dass die Summe der Radien der Kreise k_1 und k_2 gleich der Länge der Strecke $\overline{FA}$ ist.

471343

Man ermittle alle auf der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen definierten Funktionen f, die folgende Eigenschaften (i)–(iii) besitzen:

(i) Für alle nichtnegativen Zahlen x gilt $f(x) \geq 0$.

(ii) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

(iii) Für alle nichtnegativen Zahlen x und y gilt $f\big(y \cdot f(x)\big) \cdot f(x) = f(x+y)$.