

48. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 7
Aufgaben



© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

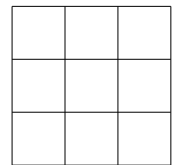
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

480711

Drei Hasen wiegen zusammen 10 Kilogramm. Der zweite Hase ist um ein Drittel schwerer als der erste Hase, der dritte Hase ist um ein Viertel leichter als der zweite Hase. Wie schwer ist jeder der drei Hasen? Weise nach, dass deine Ergebnisse die Angaben im Aufgabentext erfüllen.

480712

Trägt man Zahlen so in die neun Felder eines 3×3 -Quadrates (siehe Abbildung rechts) ein, dass die Summen der Zahlen in jeder (waagerechten) Zeile, in jeder (senkrechten) Spalte und in jeder der beiden Diagonalen untereinander gleich sind, erhält man ein sogenanntes *magisches Quadrat*. Die „untereinander gleiche“ Summe heißt *magische Zahl* des Quadrats.



Zu gegebenen neun Zahlen, mit denen man ein magisches Quadrat bilden kann, gibt es nur eine magische Zahl.

- Trage die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in ein 3×3 -Quadrat ein, dass ein magisches Quadrat entsteht, und gib die magische Zahl an.
- Untersuche, in welchen der neun Felder eines magischen Quadrates die Zahl 1 stehen kann.
- Untersuche, welche Zahlen im Zentrum – also im Mittelfeld – des magischen Quadrates stehen können.
- Es seien die neun Zahlen eines magischen Quadrates mit den Variablen a, b, \dots, i bezeichnet (siehe rechte Abbildung). Wie kann man e berechnen, wenn man die magische Zahl s kennt?

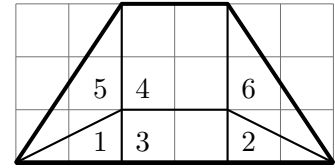
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Hinweis: Benutze hierfür die vier verschiedenen Summen, in denen e als Summand enthalten ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

480713

Zeichne das rechts auf einem Quadratraster abgebildete gleichschenklige Trapez auf ein Stück Papier oder Zeichenkarton und zerschneide es in die angegebenen sechs Teile. Lege jeweils aus allen diesen sechs Teilen



- ein Rechteck, das kein Quadrat ist,
- ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist,
- ein rechtwinkliges Dreieck.

Dabei dürfen die Teile auch umgedreht werden.

Die Aufgabe ist vollständig gelöst, wenn jeweils eine Möglichkeit gezeichnet wurde.

480714

Der griechische Philosoph Pythagoras (geb. um 570, gest. um 496 v. Chr.) entdeckte Zahlen, die „befreundet“ sind. Ihre spezielle mathematische Eigenschaft ist, dass die Summe der Teiler der einen Zahl die jeweils andere Zahl ergibt.

Das von ihm gefundene Paar ist (220; 284). Die Zahl 220 ist teilbar durch 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 und 110 und es gilt

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Die Zahl 284 hat die Teiler 1, 2, 4, 71, 142 und es gilt

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Beachte, dass im Gegensatz zur heute üblichen Definition „Die natürliche Zahl a heißt Teiler der natürlichen Zahl b genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so dass $a \cdot x = b$ gilt.“ Pythagoras den Fall $x = 1$ ausgeschlossen hat.

Ein weiteres Paar von „befreundeten“ Zahlen ist (17 296; 18 416) und wurde erst 1636 vom französischen Mathematiker Pierre de Fermat (geb. 1601, gest. 1665) entdeckt. Bis Mitte des 19. Jahrhunderts wurden etwa weitere 60 Paare „befreundeter“ Zahlen gefunden; das zweitkleinste Paar erst 1866 von einem 16-jährigen italienischen Schüler. Inzwischen kennt man Hunderte derartiger Zahlen. Bisher ungelöst ist das Problem: Gibt es unendlich viele solcher Paare?

- Überprüfe, dass das von Fermat gefundene Paar (17 296; 18 416) tatsächlich die genannten Bedingungen erfüllt.
- Ermittle das zweitkleinste Paar „befreundeter“ Zahlen, wenn du als zusätzliche Voraussetzung verwenden darfst, dass beide Zahlen zwischen 1150 und 1250 liegen.

Hinweis: Du darfst zum Lösen dieser Aufgabe ein Computerprogramm entwickeln, mit dem du deine Ergebnisse überprüfen kannst. Natürlich kannst du auch erst ein Programm entwickeln und damit die beiden Teilaufgaben a) und b) lösen.